İKİ TOPOLOJİLİ UZAYLARDA BAZI AYIRMA AKSİYOMLARI*

On Some Separation Axioms On Bitopological Spaces

Nuray GÜL
Matematik Anabilim Dalı

Fikret KUYUCU
Matematik Anabilim Dalı

ÖZET

(X,τ) bir topolojik uzay ise bu uzay üzerinde Hausdorff (T_2), regüler, T_3, tam regüler, normal, $T_{3,5}$ ve T_4 gibi ayırma aksiyomları incelenebilir. Eğer X bir küme ve τ_1, τ_2, X üzerinde iki topoloji ise (X,τ_1,τ_2)' ye iki topolojili uzay denir. İki topolojili uzaylarla ilgili çalışmalar Kelly(1963) ile başlamıştır. (X,τ) için tanımlanan ayırma aksiyomları ve kompaktlık iki topolojili uzaylara da genişletilebilir.

Bu çalışmanın amacı, iki topolojili uzaylarda ayırma aksiyomlarını, aralarındaki ilişkiyi ve kompaktlığı incelemektir.

Anahtar Kelimeler: İki topolojili uzaylar, ayırma aksiyomları

ABSTRACT

If (X,τ) is a topological space, then the separation axioms such as Hausdorff(T_2), regular, T_3, completely regular, normal, $T_{3,5}$ and T_4 axioms can be studied. If X is a set, and τ_1 and τ_2 are two topologies on X, then (X,τ_1,τ_2) is called bitopological space. The study on bitopological space was first undertaken by Kelly(1963). The separation axioms and compactness defined for (X,τ) can also be extended into bitopological spaces.

The study aims to examine the separation axioms, the relationship between them and compactness in the bitopological spaces.

Key Words: Bitopological spaces, separation axioms

Giriş

X bir küme ve τ_1, τ_2, X üzerinde iki topoloji ise (X,τ_1,τ_2) uzayına iki topolojili uzay denir.

Bu çalışmada; iki noktayı, bir küme ile dışındaki herhangi bir noktayı veya ayrık iki kümeyi, açık kümeleri kullanarak birbirinden ayırmayı tarif eden ve ayırma aksiyomları olarak da bilinen kavramların bazılarının iki topolojili uzaylardaki genellemeleri incelenmiştir.

Tanım1. X, boştan farklı bir küme ve $p: X \times X \to [0,\infty)$ dönüşümü $\forall x,y,z \in X$ için,

(p1) $p(x,x) = 0$
(p2) $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z)$ (Üçgen Eşitsizliği)
(p3) $p(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$ (Ayırma)
(p4) $p(x,y) = p(y,x)$ (Simetri)

koşulları sağlanıyorsa p' ye X üzerinde bir *metrik* denir. (X,p) ikilisine de *metrik uzay* denir. Eğer p,

* Yüksek Lisans Tezi – MSc. Thesis

(p1) ve (p2) koşullarını sağlıyor ise p' ye X üzerinde *quasi-pseudo metrik* denir. (X, p) ikilisine de *quasi-pseudo metrik uzay* denir.

(p1), (p2) ve (p3) koşulları sağlanıyorsa p' ye X üzerinde *quasi-metrik* denir. (X, p) ikilisine de *quasi-metrik uzay* denir.

(p1), (p2) ve (p4) koşulları sağlanıyorsa p' ye X üzerinde *pseudo-metrik* denir. (X, p) ikilisine de *pseudo metrik uzay* denir.

Örnek1. $q: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,\infty)$, $p(x, y) = (y - x) \vee 0 = max\{y - x, 0\}$ quasi-pseudo metriktir.

(p1) $p(x, x) = max\{x - x, 0\} = 0$

(p2) $p(x, y) = (y - x) \vee 0$ olduğundan;

$$z - x \leq p(x, z) \text{ ve } y - z \leq p(z, y)$$

$$y - x \leq \ p(x, z) + p(z, y)$$

Eğer $y < x$ ise $y - x < 0$ olur. $p(x, z) + p(z, y)$, $\{y - x, 0\}$ kümesinin bir üst sınırıdır. Bu kümenin üst sınırlarının en küçüğü $p(x, y)$ olduğuna göre $p(x, y) \leq p(x, z) + p(z, y)$ olur.

Eğer $x \leq y$ ise $0 \leq y - x$ olacağından

$$p(x, y) = 0 \leq y - x \leq \ p(x, z) + p(z, y)$$

olur.

Tanım2. $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayı verilsin. Eğer $\mathcal{P} = \tau_p$ ve $\mathcal{Q} = \tau_q$ (p ve q eşlenik) olacak şekilde bir p, quasi-pseudo metriği varsa $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayına *quasi-pseudo metriklenebilirdir* denir.

Tanım3.$(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzay olsun. $\forall x \in X$ noktasının $\mathcal{Q}$-kapalı kümelerden oluşan bir $\mathcal{P}$-komşuluk bazı varsa $\mathcal{P}$, *$\mathcal{Q}$' ya göre pairwise regüler* denir.

$\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$' ya göre pairwise regüler ve $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$' ye göre pairwise regüler ise $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayına *pairwise regüler* denir.

Örnek2. Örnek1' deki p, quasi-pseudo metriğinin ürettiği topolojiyi s ve p' nin eşleniği q' nun ürettiği topolojiyi t ile gösterirsek bunlardan oluşan iki topolojili yapı $(\mathbb{R}, s, t)$ olur. $(\mathbb{R}, s, t)$ iki topolojili uzayı pairwise regüler uzaydır. Gerçekten $\forall x \in X$ noktası için;

$B_{1_x} = \{[x + \varepsilon, +\infty): \varepsilon > 0\}$ τ_p-kapalı τ_q-komşuluklar bazı ve

$B_{2_x} = \{(-\infty, x - \varepsilon]: \varepsilon > 0\}$ ailesi de x' in τ_q-kapalı τ_p-komşuluklar bazıdır.

Önerme1. $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayı verilsin. $\mathcal{P}$' nin $\mathcal{Q}$' ya göre pairwise regüler olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $x \in X$ için K, $\mathcal{P}$-kapalı ve $x \notin K$ olduğunda $x \in U$ ve $K \subseteq V$ olacak şekilde $U \in \mathcal{P}$ ve $V \in \mathcal{Q}$ ayrık kümelerinin var olmasıdır.

İspat: ($\Longrightarrow$): $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ pairwise regüler iki topolojili uzay, $x \in X$, $x \notin K$ ve K, $\mathcal{P}$-kapalı küme olsun. O zaman $(X - K) \in \mathcal{P}$ ve $x \in (X - K)$' dır. Varsayımdan $x \in T \subseteq (X - K)$ olacak şekilde bir $\mathcal{Q}$-kapalı $\mathcal{P}$-komşuluğu T vardır. T, $\mathcal{P}$-komşuluk olduğundan,

$$x \in U \subseteq T \subseteq (X - K)$$

olacak şekilde bir $U \in \mathcal{P}$ vardır. O halde $K \subseteq (X - T)$, $x \in U$, $U \in \mathcal{P}$, $(X - T) \in \mathcal{Q}$ ve $U \cap (X - T) = \emptyset$' dir.
$(\Leftarrow)$: $x \in X$ ve U_x kümesi x' in bir $\mathcal{P}$-komşuluğu olsun. $x \in U \subseteq U_x$ olacak şekilde $U \in \mathcal{P}$ vardır. $(X - U)$ kümesi $\mathcal{P}$-kapalıdır. O zaman $x \in G$ ve $(X - U) \subseteq H$ olacak şekilde $G \in \mathcal{P}$ ve $H \in \mathcal{Q}$ ayrık kümeleri vardır.

$$x \in G \subseteq (X - H) \subseteq U \subseteq U_x$$

olduğundan $(X - H)$ kümesi x' in $\mathcal{Q}$-kapalı $\mathcal{P}$-komşuluğudur. Dolayısıyla x noktasının $\mathcal{Q}$-kapalı kümelerden oluşan bir $\mathcal{P}$-komşuluğu vardır. O halde $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$' ya göre pairwise regülerdir.

Örnek3. $\mathcal{P}$ ayrık olmayan topolojik uzay, $\mathcal{Q}$ ayrık topolojik uzay olmak üzere $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayı pairwise regülerdir. $\forall x \in X$ için $\{X\}$ ailesi x' in $\mathcal{P}$-kapalı $\mathcal{Q}$-komşuluklar bazı ve ayrıca $\mathcal{Q}$-kapalı $\mathcal{P}$-komşuluklar bazıdır.

Tanım4. $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzay olsun. $x \neq y$ olan $\forall x, y \in X$ için,

$$x \in U, y \notin U \; ve \; y \in V, x \notin V$$

olacak şekilde $U \in \mathcal{P}$ ve $V \in \mathcal{Q}$ kümeleri varsa $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayına *pairwise T_1 uzay* denir.

Örnek4. Örnek1' deki $(\mathbb{R}, s, t)$ iki topolojili uzayı pairwise T_1 uzaydır. $x \neq y$ olan $\forall x, y \in X$ için $x < y$ ise $x \in (-\infty, y)$, $y \notin (-\infty, y)$ ve $y \in (x, +\infty)$, $x \notin (x, +\infty)$ olacak biçimde $(-\infty, y) \in s$ ve $(x, +\infty) \in t$ kümeleri vardır. $y < x$ durumu için de benzer şekilde gösterilebilir.

Önerme2. $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayının pairwise T_1 olması için gerek ve yeter koşul $(X, \mathcal{P})$ ve $(X, \mathcal{Q})$ topolojik uzaylarının T_1 olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$: $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayı pairwise T_1 olsun. O zaman $x \neq y$ olacak şekildeki $x, y \in X$ için $x \in U_1$, $y \notin U_1$ ve $x \notin V_1$, $y \in V_1$ olacak şekilde $U_1 \in \mathcal{P}$ ve $V_1 \in \mathcal{Q}$ vardır. Benzer şekilde $x \notin U_2$, $y \in U_2$ ve $x \in V_2$, $y \notin V_2$ olacak şekilde $U_2 \in \mathcal{P}$ ve $V_2 \in \mathcal{Q}$ vardır. O halde,

$$x \in U_1, y \notin U_1 \text{ ve } x \notin U_2, y \in U_2$$

olacak şekilde $U_1, U_2 \in \mathcal{P}$ vardır. Dolayısıyla $(X, \mathcal{P})$ topolojik uzayı bir T_1 uzaydır. Benzer şekilde $(X, \mathcal{Q})$ topolojik uzayının da T_1 olduğu görülebilir.
$(\Leftarrow)$: $(X, \mathcal{P})$ ve $(X, \mathcal{Q})$ topolojik uzayları T_1 olsun. O zaman $x \neq y$ olacak şekildeki $x, y \in X$ noktalarını düşünelim. O zaman $x \in U_1$, $y \notin U_1$ ve $x \notin U_2$, $y \in U_2$ olacak şekilde $U_1, U_2 \in \mathcal{P}$ vardır. Benzer şekilde $x \in V_1$, $y \notin V_1$ ve $x \notin V_2$, $y \in V_2$ olacak şekilde $V_1, V_2 \in \mathcal{Q}$ vardır. Buradan,

$$x \in U_1, y \notin U_1 \text{ ve } x \notin V_2, y \in V_2$$

olacak şekilde $U_1 \in \mathcal{P}$ ve $V_2 \in \mathcal{Q}$ elde edilir. O halde $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayı pairwise T_1' dir.

Tanım5. $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzay olsun. $x \neq y$ olan $\forall x, y \in X$ için $x \in U$ ve $y \in V$ olacak şekilde $U \in \mathcal{P}$ ve $V \in \mathcal{Q}$ ayrık kümeleri varsa $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayına *pairwise Hausdorff uzay* denir.

Önerme3. $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ pairwise Hausdorff ise $(X, \mathcal{P})$ ve $(X, \mathcal{Q})$ topolojik uzayları T_1' dir.

İspat: $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ pairwise Hausdorff, $x \neq y$ ve $x, y \in X$ olsun. $x \in U_1$ ve $y \in V_1$ olacak şekilde $U_1 \in \mathcal{P}$ ve $V_1 \in \mathcal{Q}$ ayrık kümeleri vardır. Benzer şekilde $y \in U_2$ ve $x \in V_2$ olacak şekilde $U_2 \in \mathcal{P}$ ve $V_2 \in \mathcal{Q}$ ayrık kümeleri vardır. O halde $x \in U_1$, $y \notin U_1$ ve $x \notin U_2$, $y \in U_2$ olacak şekilde $U_1, U_2 \in \mathcal{P}$var olduğundan $(X, \mathcal{P})$ topolojik uzayı T_1' dir. Benzer şekilde $(X, \mathcal{Q})$ topolojik uzayının da T_1 olduğu gösterilebilir.

Örnek5. $\mathcal{P}$ ayrık topoloji, $\mathcal{Q}$ ayrık olmayan topoloji olmak üzere $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayı pairwise Hausdorff değildir.

Önerme4. Bir X kümesi üzerindeki p ve q eşlenik quasi-pseudo metriklerinin quasi metrik olması için gerek ve yeter koşul (X, τ_p, τ_q) iki topolojili uzayının pairwise Hausdorff olmasıdır.

İspat: $(\Longrightarrow)$: p ve q eşlenik quasi-pseudo metrikler, $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. O zaman $p(x, y) = \varepsilon$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ gerçel sayısı vardır. Buradan

$$B_p\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \in \tau_p, B_q\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) \in \tau_q \ ve \ B_p\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B_q\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \emptyset$$

olur. Gerçekten $B_p\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B_q\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) \neq \emptyset$ olsun. O zaman $\exists z \in X$ için, $z \in B_p\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B_q\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ dir. Buradan $p(x, z) < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $q(y, z) = p(z, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ olduğundan $p(x, y) \leq p(x, z) + p(z, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ elde edilir. Bu ise $p(x, y) = \varepsilon$ olması ile çelişir.

$(\Longleftarrow)$: $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. (X, τ_p, τ_q) pairwise Hausdorff olduğundan uygun bir $\varepsilon > 0$ için $y \notin B_p(x, \varepsilon)$ olur. O halde $p(x, y) \neq 0$' dır. Dolayısıyla p, quasi metriktir. Benzer şekilde q' nun da quasi metrik olduğu görülür.

Örnek6. $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{P}$, ayrık topoloji ve $\mathcal{Q}$, sonlu tümleyenler topolojisi olmak üzere $(\mathbb{R}, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ pairwise Hausdorfftur. Gerçekten $x \neq y$, $x, y \in \mathbb{R}$ olsun. $x \in \{x\}$, $y \in (\mathbb{R} - \{x\})$, $\{x\} \in \mathcal{P}$ ve $(\mathbb{R} - \{x\}) \in \mathcal{Q}$ olup $\{x\} \cap (\mathbb{R} - \{x\}) = \emptyset$ olduğundan $(\mathbb{R}, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ pairwise Hausdorfftur. Ancak $(X, \mathcal{Q})$ Hausdorff değildir. $(X, \mathcal{Q})$ Hausdorff olsun. $x \neq y$, $x, y \in \mathbb{R}$ için $x \in U$ ve $y \in V$ olacak şekilde $U, V \in \mathcal{Q}$ ayrık kümeleri vardır. $U \cap V = \emptyset$ olduğundan $U \subseteq (\mathbb{R} - V)$' dir. U, sonsuz, $(\mathbb{R} - V)$ sonlu küme olduğundan çelişki elde edilir. $(\mathbb{R}, \mathcal{Q})$ Hausdorff değildir.

Tanım6. $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayı verilsin. H ve K sırasıyla X' in $\mathcal{P}$-kapalı ve $\mathcal{Q}$-kapalı ayrık alt kümeleri verildiğinde $H \subseteq V$ ve $K \subseteq U$ olacak şekilde $U \in \mathcal{P}$ ve $V \in \mathcal{Q}$ ayrık kümeleri varsa $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayına *pairwise normal* denir.

Örnek7. Örnek1' deki $(\mathbb{R}, s, t)$ iki topolojili uzayı pairwise normaldir. $(\mathbb{R}, s, t)$ iki topolojili uzayında $a, b \in \mathbb{R}$ için $[a, \infty)$ kümesi s-kapalı, $(-\infty, b]$ kümesi t-kapalı ve $[a, \infty) \cap (-\infty, b] = \emptyset$ olsun. O zaman,

$$[a,\infty) \subseteq \left(\frac{a+b}{2},\infty\right) \text{ ve } (-\infty,b] \subseteq \left(-\infty,\frac{a+b}{2}\right)$$

olacak şekilde ayrık $\left(-\infty,\frac{a+b}{2}\right) \in s$ ve $\left(\frac{a+b}{2},\infty\right) \in t$ kümeleri vardır. O halde $(\mathbb{R},s,t)$ iki topolojili uzayı pairwise normaldir.

Önerme5. $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ iki topolojili uzayının pairwise normal olması için gerek ve yeter koşul H, $\mathcal{Q}$-kapalı, $U \in \mathcal{P}$ ve $H \subseteq U$ iken,

$$H \subseteq V \subseteq K \subseteq U$$

olacak şekilde $V \in \mathcal{P}$ ve K, $\mathcal{Q}$-kapalı kümelerinin olmasıdır.

İspat: ($\Longrightarrow$): $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ pairwise normal, H, $\mathcal{Q}$-kapalı, $U \in \mathcal{P}$ ve $H \subseteq U$ olsun. $(X-U)$, $\mathcal{P}$-kapalı ve $H \cap (X-U) = \emptyset$ olduğundan $H \subseteq G$, $(X-U) \subseteq V$ ve $G \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $G \in \mathcal{P}$ ve $\mathcal{Q}$-kapalı $(X-V)$ kümesi vardır. Ayrıca $H \subseteq G \subseteq (X-V) \subseteq U$ olduğundan istenen sağlanmış olur.

($\Longleftarrow$): H, $\mathcal{P}$-kapalı, K, $\mathcal{Q}$-kapalı ve $H \cap K = \emptyset$ olsun. $(X-H) \in \mathcal{P}$ ve $K \subseteq (X-H)$ olduğundan,

$$K \subseteq U \subseteq F \subseteq (X-H)$$

olacak şekilde $U \in \mathcal{P}$ ve F, $\mathcal{Q}$-kapalı kümeleri vardır. $K \subseteq U$, $H \subseteq (X-F)$, $U \in \mathcal{P}$ ve $(X-F) \in \mathcal{Q}$ olduğundan $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ pairwise normaldir.

Tanım7. $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ iki topolojili uzayı ve $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $a \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}\big((a,\infty)\big) = \{x \in X: f(x) > a\} \in \mathcal{P}$ oluyorsa f' ye $\mathcal{P}$-*alt yarı sürekli fonksiyon* denir. Eğer $a \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}\big((-\infty,a)\big) = \{x \in X: f(x) < a\} \in \mathcal{P}$ oluyorsa f' ye $\mathcal{P}$-*üst yarı sürekli fonksiyon* denir.

Teorem1. *(Urysohn Lemma)* $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ iki topolojili uzayının pairwise normal olması için gerek ve yeter koşul H, $\mathcal{P}$-kapalı ve K, $\mathcal{Q}$-kapalı ayrık kümeleri için aşağıdaki koşulları sağlayan bir $g: X \to [0,1]$ fonksiyonunun var olmasıdır.

(a) $g(K) = \{0\}$ ve $g(H) = \{1\}$

(b) $g,\ \mathcal{P} - üst\ yarı\ sürekli\ ve\ \mathcal{Q} - alt\ yarı\ süreklidir.$

İspat:($\Longrightarrow$): Kabul edelim ki $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ iki topolojili uzayı pairwise normal olsun. H, $\mathcal{P}$-kapalı ve K, $\mathcal{Q}$-kapalı ayrık kümeler olsunlar. $K_0 = G$ ve $G_1 = (X-H)$ olarak alalım. Bu durumda K_0, $\mathcal{Q}$-kapalı, G_1, $\mathcal{P}$-açık ve $K_0 \subseteq G_1$ olur. $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ pairwise normal olduğundan $K_0 \subseteq G_{\frac{1}{2}} \subseteq K_{\frac{1}{2}} \subseteq G_1$ olacak şekilde $G_{\frac{1}{2}}$, $\mathcal{P}$-açık ve $K_{\frac{1}{2}}$, $\mathcal{Q}$-kapalı kümeleri vardır. $K_0, G_{\frac{1}{2}}$ ve $K_{\frac{1}{2}}, G_1$ kümelerine aynı işlem devam ettirilirse;

$$K_0 \subseteq G_{\frac{1}{4}} \subseteq K_{\frac{1}{4}} \subseteq G_{\frac{1}{2}} \subseteq K_{\frac{1}{2}} \subseteq G_{\frac{3}{4}} \subseteq K_{\frac{3}{4}} \subseteq G_1$$

olacak şekilde $G_{\frac{1}{4}}, G_{\frac{3}{4}}$, $\mathcal{P}$-açık, $K_{\frac{1}{4}}, K_{\frac{3}{4}}$, $\mathcal{Q}$-kapalı kümeleri vardır. Bu işleme devam edildiğinde $q \in \mathbb{N}^{+}$ olmak üzere;

$$p = 1,2, \dots, 2^q - 1 \; için \; (K_s)_{s=\frac{p}{2^q}}, \mathcal{Q}\text{-kapalı}$$
$$p = 1,2, \dots, 2^q - 1 \; için \; (G_s)_{s=\frac{p}{2^q}}, \mathcal{P}\text{-açık}$$

kümelerini elde ederiz. Eğer s başka bir diyadik sayı ise,

$$K_s = \begin{cases} \emptyset, & s < 0 \; ise \\ X, & s \geq 1 \; ise \end{cases} \text{ ve } G_s = \begin{cases} \emptyset, & s \leq 0 \; ise \\ X, & s > 1 \; ise \end{cases}$$

olsun. Bu durumda $r < s < t$ için $K_r \subseteq G_s \subseteq K_s \subseteq G_t$ olur. $g: X \to [0,1]$ fonksiyonu

$$g(x) = \begin{cases} inf\{t: x \in G_t\}, & \{t: x \in G_t\} \neq \emptyset \\ 1, & diğer \; durumda \end{cases}$$

olarak tanımlansın.
(a) Eğer $x \in K = K_0$ için $g(x) = inf\{t: x \in G_t\} = 0$ olur. $x \in H$ ise $x \notin (X - H)$' dır. O zaman $\forall t$ için $x \notin G_t$' dir. $\{t: x \in G_t\} = \emptyset$ olduğundan $g(x) = 1$' dir. O halde $g(K) = \{0\}$ ve $g(H) = \{1\}$' dir.
(b)$0 < \alpha \leq 1$ için $g^{-1}([0,\alpha)) = \{x \in X: g(x) < \alpha\}$ olduğundan $t < \alpha \leq 1$ ve $x \in G_t$ olacak şekilde $\exists t$ vardır. Dolayısıyla $g^{-1}([0,\alpha)) = \bigcup_{t<\alpha} G_t \in \mathcal{P}$ olur. O halde $\mathcal{P}$-üst yarı süreklidir.
$0 < \alpha \leq b$ için $g(x) > \alpha$ olsun. $t < \alpha$ ise $x \notin G_t$' dir. O zaman $\exists r < t$ için $x \notin K_r$' dir. $x \in (X - K_r)$ olduğundan $x \in (X - K_r) \subseteq g^{-1}((\alpha, 1])$ olur. Bu nedenle $g^{-1}((\alpha, 1] \in \mathcal{Q}$' dur. O halde g, $\mathcal{Q}$-alt yarı süreklidir.
($\Leftarrow$): $H \cap K = \emptyset$ olacak şekilde H, $\mathcal{P}$-kapalı, K, $\mathcal{Q}$-kapalı kümeler olsunlar. $g(K) = \{0\}$ ve $g(H) = \{1\}$ olacak şekilde $\mathcal{P}$-üst yarı sürekli, $\mathcal{Q}$-alt yarı sürekli $g: X \to [0,1]$ fonksiyonunu alalım. g, $\mathcal{P}$-üst yarı sürekli olduğundan $U = g^{-1}\left([0, \frac{1}{2})\right) = \left\{x \in X: g(x) < \frac{1}{2}\right\} \in \mathcal{P}$' dir ve $K \subseteq U$ olur. g, $\mathcal{Q}$-alt yarı sürekli olduğundan $V = g^{-1}\left((\frac{1}{2}, 1]\right) = \left\{x \in X: g(x) > \frac{1}{2}\right\} \in \mathcal{Q}$' dur ve $H \subseteq V$ olur. Ayrıca $U \cap V = \emptyset$ olduğundan $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayı pairwise normaldir.

Tanım8. $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzay olsun. Eğer $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{Q}$' nun sayılabilir birer bazı varsa $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayına *ikinci sayılabilir* denir.

Lemma1. İkinci sayılabilir ve pairwise regüler bir iki topolojili uzay pairwise normaldir.

İspat: $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayı ikinci sayılabilir ve pairwise regüler olsun. O zaman $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{Q}$' nun her ikisininde sayılabilir bazları vardır.

$$B_{\mathcal{P}} = \{P_n: n \in \mathbb{N}\} \text{ ve } B_{\mathcal{Q}} = \{Q_n: n \in \mathbb{N}\}$$

sırasıyla $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{Q}$ için sayılabilir bazlar olsunlar. F, $\mathcal{P}$-kapalı, K, $\mathcal{Q}$-kapalı ve $F \cap K = \emptyset$ olsun. $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ pairwise regüler olduğundan $x \in F$ ise,

$$x \in \mathcal{Q}_n^x \subseteq cl_{\mathcal{P}}(\mathcal{Q}_n^x) \subseteq (X - K)$$

olacak şekilde $\mathcal{Q}_n^x \in B_Q$ kümesi vardır. Aynı şekilde $y \in K$ ise,

$$y \in \mathcal{P}_n^y \subseteq cl_{Q}(\mathcal{P}_n^y) \subseteq (X - F)$$

olacak şekilde $\mathcal{P}_n^y \in B_{\mathcal{P}}$ kümesi vardır.
$y \in \mathcal{P}_n^y$ ise $y \notin X - \mathcal{P}_n^y$ olup,

$$\mathcal{P}_m^y \subseteq cl_{Q}(\mathcal{P}_m^y) \subseteq \mathcal{P}_n^y$$

olacak şekilde $\mathcal{P}_m^y \in B_{\mathcal{P}}$ kümesi vardır. Benzer şekilde,

$$\mathcal{Q}_m^x \subseteq cl_{\mathcal{P}}(\mathcal{Q}_m^x) \subseteq \mathcal{Q}_n^x$$

olacak şekilde $\mathcal{Q}_m^x \in B_Q$ kümesi vardır.
Böyle devam edilirse $\mathcal{G} = \{\mathcal{P}_n^y : y \in K\}$ ailesi ile K' nın bir $\mathcal{P}$-açık örtüsü ve $\mathcal{H} = \{\mathcal{Q}_n^x : x \in F\}$ ailesi ile F' nin bir $\mathcal{Q}$-açık örtüsü elde edilmiş olur. $\mathcal{G} \subseteq B_{\mathcal{P}}$ ve $\mathcal{H} \subseteq B_Q$ olduğundan $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{H}$ ailesi sayılabilirdir. Bu örtüler için yeni bir indeksleme yapılırsa, $\{\mathcal{P}_m : m \in \mathbb{N}\}$, K' yı örten ve $\mathcal{G}$' nin elemanlarından oluşan sayılabilir bir aile ve $\{Q_m : m \in \mathbb{N}\}$, F' yi örten ve $\mathcal{H}$' nin elemanlarından oluşan sayılabilir bir aile olur.

$$\mathcal{Q}_m^* = \left(Q_m - \cup_{k \le m}(cl_{Q}(\mathcal{P}_k))\right) \text{ ve } \mathcal{P}_m^* = (\mathcal{P}_m - \cup_{k \le m}(cl_{\mathcal{P}}(\mathcal{Q}_k)))$$

olarak tanımlansın.

$$U = \cup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_m^* \text{ ve } V = \cup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{Q}_m^*$$

olsun. $U \cap V = \emptyset$' dir. Bunu kanıtlamak için $U \cap V \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. O zaman $\exists z \in X$ için $z \in U$ ve $z \in V$ olur. U ve V' nin tanımından $\exists m_0 \in \mathbb{N}$; $z \in \mathcal{P}_{m_0}^*$ve $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $z \in \mathcal{Q}_{n_0}^*$' dır. $\mathcal{P}_{m_0}^*$ ve $\mathcal{Q}_{n_0}^*$ tanımından $z \in \mathcal{P}_{m_0}$, $z \notin \cup_{k \le m_0} cl_{\mathcal{P}}(\mathcal{Q}_k)$ ve $z \in \mathcal{Q}_{n_0}$, $z \notin \cup_{k \le n_0} cl_{Q}(\mathcal{P}_k)$ olur. Buradan $\forall k \le m_0$ için $z \notin cl_{\mathcal{P}}(\mathcal{Q}_k)$, $\forall k \le n_0$ için $z \notin cl_{Q}(\mathcal{P}_k)$ elde edilir. Eğer $m_0 < n_0$ ise $z \notin cl_{Q}(P_{m_0})$ olur ki $z \in \mathcal{P}_{m_0}$ olması ile çelişir. Eğer $n_0 \le m_0$ ise $z \notin cl_{\mathcal{P}}(\mathcal{Q}_{n_0})$ olur ki $z \in \mathcal{Q}_{n_0}$ olması ile çelişir. O zaman $U \cap V = \emptyset$' dir.
Şimdi $F \subseteq V$ olduğunu gösterelim. $x \in F$ ise $x \in \mathcal{Q}_m$ olacak şekilde $m \in \mathbb{N}$ vardır. $k \le m$ için $cl_{Q}(P_k) \subseteq (X - F)$ olduğundan $x \notin cl_{Q}(P_k)$ olur. O halde $x \in V$ olur. Benzer şekilde $K \subseteq U$ olduğu görülür.
Tanım9. X üzerindeki bir τ topolojisinde x' i içeren her $G \in \tau$ açık kümesi için $\forall \sigma \ge \sigma_0, x_\sigma \in G$ olacak şekilde bir $\sigma_0 \in \Sigma$ varsa $x \in X$ noktası, X üzerinde bir $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ ağının τ *limit noktası* olarak adlandırılır.

Tanım10. (X,τ_1,τ_2) iki topolojili uzay olsun. Eğer X üzerindeki bir $\{x_\sigma: \sigma \in \Sigma\}$ ağı için $x \in lim_{\tau_1} x_\sigma$ ve $y \in lim_{\tau_2} x_\sigma$ olduğunda $cl_{\tau_1}(x) = cl_{\tau_2}(y)$ oluyorsa (X,τ_1,τ_2) iki topolojili uzayına *pairwise weakly Hausdorff* denir.
Örnek8. $X = \{a,b,c\}$ ve $\tau = \tau_1 = \tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b,c\}\}$ olsun. (X,τ_1,τ_2) iki topolojili uzayı pairwise weakly Hausdorff fakat pairwise Hausdorff değildir.
Şimdi $a, b \in lim_{\tau_1} x_\sigma = lim_{\tau_2} x_\sigma$ olsun.

$$a \in lim x_\sigma \Leftrightarrow a \in U = \{a\} \in \tau, \exists \sigma_0 \in \Sigma \ni \sigma \geq \sigma_0 \; için \; x_\sigma \in U = \{a\}$$

$$b \in \lim x_\sigma \Leftrightarrow b \in V = \{b,c\} \in \tau, \exists \sigma_1 \in \Sigma \ni \sigma \geq \sigma_1 \; için \; x_\sigma \in V = \{b,c\}$$

Σ yönlendirilmiş olduğundan $\exists \sigma_2 \in \Sigma \ni \sigma_2 > \sigma_0 \; ve \; \sigma_2 > \sigma_1$ vardır.
$\Rightarrow \sigma > \sigma_2 \; için \; x_\sigma \in U \cap V = \emptyset$. Dolayısıyla $a, b \in lim_\tau x_\sigma$ olacak şekilde X' de $\{x_\sigma: \sigma \in \Sigma\}$ ağı yoktur.

$$b, c \in lim x_\sigma \Rightarrow cl\{b\} = cl\{c\}$$

dir. Böylece (X,τ_1,τ_2) iki topolojili uzayı pairwise weakly Hausdorfftur. Pairwise Hausdorff olmadığını gösterelim.
$b, c \in X \; için \; b \in U \in \tau_1, c \in V \in \tau_2$ alındığında $U = X$ veya $U = \{b,c\}$ ve $V = X$ veya $V = \{b,c\}$ olmak zorunda olup $U \cap V \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla (X,τ_1,τ_2) iki topolojili uzayı pairwise Hausdorff değildir.
Tanım11. (X,τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $A \subseteq G$ olacak şekildeki her $G \in \tau$ için $cl_\tau(A) \subseteq G$ oluyorsa A' ya *g-kapalı* denir.
$\mathfrak{D} = \{A \subseteq X: A \; g - kapalı\}$ olsun. Herhangi bir $E \subset X$ için;

$$Cl^*(E) = \cap \{A \in \mathfrak{D}: E \subset A\}$$

ve

$$\tau^* = \{E \subset X: Cl^*(X - E) = X - E\}$$

olarak tanımlayalım.
Teorem2. (i) Cl^*, X üzerinde bir Kuratowski operatör, yani τ^*, Cl^* tarafından üretilmiş alışılmış topolojidir.
(ii) $\tau \subseteq \tau^*$
(iii) $\forall x \in X$ için ya $\{x\}$ kapalı ya da $X - \{x\}$ g-kapalıdır.

İspat: (ii) $U \in \tau$ olsun. $X - U \subseteq G \in \tau$ ise $X - U$ kapalı olduğundan;

$$cl(X - U) = X - U \subseteq G$$

olur.

$$\Rightarrow X - U \text{ g-kapalıdır.}$$

$$\Rightarrow Cl^*(X - U) = X - U$$

$$\Rightarrow U \in \tau^*$$

dir. Böylece $\tau \subseteq \tau^*$ dır.
(iii) $\forall x \in X$ için kabul edelim ki $\{x\}$ kapalı olmasın. $X - \{x\} \subseteq G \in \tau$ olsun. Bu durumda $G = X - \{x\}\ veya\ G = X$ dir. $G = X - \{x\}$ ise G açık olduğundan $\{x\}$ kapalı olur. Bu ise kabulümüzle çelişir. Böylece $G = X$ dir.

$$\Rightarrow X - \{x\} \subseteq G = X$$

$$\Rightarrow cl(X - \{x\}) \subseteq G = X$$

$$\Rightarrow X - \{x\} \text{ g-kapalıdır.}$$

Tanım12. A, bir (X, τ) topolojik uzayının alt kümesi olsun. Eğer,

$$A \subset int_\tau(cl_\tau(int_\tau(A))$$

ise A alt kümesi $\alpha - açık$ olarak adlandırılır. Bütün $\alpha - açık$ kümelerinin ailesi τ^α ile gösterilir. O zaman τ^α , X üzerinde bir topoloji olup, daima $\tau \subseteq \tau^\alpha$ dır.
Tanım13. (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzay olsun. Eğer $\forall x \in X$ noktası ve $x \notin F$ olacak şekilde ki her τ_i-kapalı alt kümesi F için,

$$F \subset V, x \in U\ ve\ U \cap V = \emptyset\ (i, j, k \in \{1,2\})$$

olacak şekilde bir τ_j-açık kümesi V ve bir τ_k-açık kümesi U varsa (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzayına (τ_i, τ_j, τ_k)*-regüler* denir.
Tanım14.(X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzay ve $\mathcal{U}$, bu uzayın bir örtüsü olsun. Eğer $\mathcal{U} \subset \tau_1 \cup \tau_2$ ise $\mathcal{U}$ örtüsüne $\tau_1\tau_2$*-açık örtü* denir. Ayrıca $\mathcal{U}$, τ_1' in en az bir elemanını ve τ_2' nin en az bir elemanını içeriyorsa $\mathcal{U}$ örtüsüne *pairwise açık* denir.
Tanım15. (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzay olsun. Eğer (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzayının her pairwise açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahipse bu uzaya *pairwise kompakt* denir.
Örnek9. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, $\mathcal{R} = \{\emptyset, \mathbb{R}, (a, +\infty): a \in \mathbb{R}\}$ ve $\mathcal{Q} = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, a): a \in \mathbb{R}\}$ olsun. $\mathcal{U}$, $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$' nun bir pairwise açık örtüsü olsun. Bir $(b, +\infty) = U \in \mathcal{U}$ alalım. Eğer $b < a$ olacak şekilde bir $(-\infty, a) = V \in \mathcal{U}$ varsa $\{U, V\} \subseteq \mathcal{U}$ bir örtü olur. Aksi halde $c = sup\{a: (-\infty, a) \in \mathcal{U}\ ve\ a \leq b\} \in \mathbb{R}$ vardır. O zaman $c \in (b_0, +\infty) = U_0 \in \mathcal{U}$ olacak şekilde bir $U_0 \in \mathcal{U}$ vardır. c' den dolayı $(-\infty, a_0) = V_0$ ve $b_0 < a_0 \leq c$ olacak şekilde $V_0 \in \mathcal{U}$ vardır. Bu durumda $\{V_0, U_0, U\} \subseteq \mathcal{U}$, $\mathbb{R}$' yi örter. Böylece $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \mathcal{Q})$ pairwise kompakttır.

Tanım16. (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzay olsun. Eğer (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzayının her pairwise açık örtüsü sayılabilir bir alt örtüye sahipse bu uzaya *pairwise Lindelöff uzay* denir.

Önerme6. Herhangi bir ikinci sayılabilir iki topolojili uzay pairwise Lindelöfftür.

İspat: (X, τ_1, τ_2) ikinci sayılabilir iki topolojili uzay, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{C_m\}_{m=1}^{\infty}$ sırasıyla τ_1 ve τ_2 için sayılabilir bazlar ve $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, X' in pairwise açık örtüsü olsun. Bazı $U_\alpha \in \mathcal{U} \cap \tau_1$ için $B_n \subset U_\alpha$ olacak şekildeki n tamsayılarının kümesi N ve bazı $U_\alpha \in \mathcal{U} \cap \tau_2$ için $C_m \subset U_\alpha$ olacak şekildeki m tamsayılarının kümesi M olsun. $B_n \subset U_\alpha$ olacak şekildeki U_α' ların biri V_n ve $C_m \subset U_\alpha$ olacak şekildeki U_α' ların biri W_m ile tanımlansın. O zaman $\mathcal{U}^* = \{V_n : n \in \mathrm{N}\} \cup \{W_m : m \in \mathrm{M}\}$, X için $\mathcal{U}$' nun sayılabilir bir alt örtüsüdür. $x \in X$ olsun. $\mathcal{U}$, X' i örttüğünden $x \in U_\beta$ olacak şekilde $U_\beta \in \mathcal{U}$ vardır. Şimdi U_β, ya τ_1-açık ya da τ_2-açıktır. Eğer U_β, τ_1-açık ise $x \in B_k \subset U_\beta$ olacak şekilde bir k tamsayısı vardır. Böylece $x \in B_k \subset V_k$ olacak şekilde bir $V_k \in \mathcal{U}^*$ kümesi vardır. Benzer şekilde; eğer U_β, τ_2-açık ise $x \in C_l \subset U_\beta$ olacak şekilde bir l tamsayısı vardır. Böylece $x \in C_l \subset W_l$ olacak şekilde bir $W_l \in \mathcal{U}^*$ kümesi vardır. Bu durumda (X, τ_1, τ_2) pairwise Lindelöfftür.

Kaynaklar

BÜLBÜL, A., 1994. Genel Topoloji, Karadeniz Teknik Ünv., 172(48), Trabzon.

COOKE, I. E., and REILLY, I. L., 1975. On Bitopological Compactness. J.London Math. Soc., 8:518-522

FLETCHER, P., HOYLE, H. B., and PATTY, C. W., 1969. Comparison Of Topologies. Duke Math. J., 36:325-331

FUKUTAKE, T., 1987. On Some Seperation Properties on Bitopological Spaces. Kyungpook Math. J. Volume 27, 2:115-125

KELLY, J. C., 1963. Bitopological Spaces. Proc. London. Math. Soc., 13:71-89

LANE, E. P., 1967. Bitopological Spaces and Quasi-Uniform Spaces. Proc. London Math. Soc. 17:241-256

REILLY, I. L., 1973. Pairwise Lindelof Bitopological Spaces. Kyungpook Math. J. 13:1-4

WİLLARD, S., 1970. General Topology, Addison-Wesley, London,