ESAS GRUPOİDLER VE UYGULAMALARI*

Fundamental grupoids and its applications

Ayşe ÇOBANKAYA
Matematik Anabilim Dalı

Doğan DÖNMEZ
Matematik Anabilim Dalı

ÖZET

Bu çalışmada bir topolojik uzayın esas grupoidi tanımlandı ve esas grupoidin topolojik uzaylar kategorisine kovaryant bir funktor olduğu gösterildi. Daha sonra Seifert-van Kampen teoreminin daha genel şeklinin bir ispatı verildi. Ayrıca grupoidler arasında örtü morfizmaları çalışıldı ve yükseltme teoremi ispatlandı.
Anahtar Kelimeler: Topolojik Uzaylar, Esas Grup, Örtü uzayı, Seifert-van Kampen Teoremi, Esas Grupoid.

ABSTRACT

In this thesis, the fundamental grupoid of a topological space is defined and proved to be a covariant functor from the category of topological spaces to be category of grupoids. Also a proof of a more general form of the Seifert-Van Kampen theorem is given. We also study the concept of covering morphism between groupoids and a lifting theorem is proven.
Key Words: Topological Spaces, Fundamental Grup, Covering Spaces, Seifert-van Kampen Theorem, Fundamental Grupoid.

Giriş

Tanım 1: Bir $\mathcal{C}$ kategorisi ,

1. $Ob\mathcal{C}$ ile gösterilen, $\mathcal{C}$ nin objelerinin sınıfı,
2. $\forall x, y \in Obj\mathcal{C}$ için $\mathcal{C}(x,y)$ ile gösterilen (ve elemanlarına x den y ye morfizmalar diyeceğimiz ve $f\colon x \to y$ şeklinde göstereceğimiz) kümelerden oluşur.

* Yüksek Lisans Tezi-MSc. Thesis

Morfizmalar arasındaki bir bileşke işlemi:

$$\mathcal{C}(y,z) \times \mathcal{C}(x,y) \to \mathcal{C}(y,z)$$
$$(g,f) \longmapsto gf$$ (Bazı özel kategorilerde $g+f$ şeklinde yazacağız.)

Aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır.

(i) $\forall h \in \mathcal{C}(z,w),\ \forall g \in \mathcal{C}(y,z), \forall f \in \mathcal{C}(x,y)$ için $(hg)f = h(gf)$

(ii) $\forall x \in Obj\mathcal{C}$ için $1_x \in \mathcal{C}(x,x)$ vardır öyle ki $\forall g \in \mathcal{C}(w,x)$ ve $\forall f \in \mathcal{C}(x,y)$ için $1_x g = g$ ve $f 1_x = f$

$f, \mathcal{C}$ nin bir morfizması ise bazen $f \in \mathcal{C}$ yazacağız.

* Yüksek Lisans Tezi-MSc. Thesis

Tanım 2 : Bir kategorinin nesneleri topluluğu bir küme ise o kategoriye küçük kategori denir.

Örnek 1 : X bir topolojik uzay, PX
Objeleri: X in noktaları
Morfizmaları: $PX(x,y) = \{a: x,y \in X \text{ için } a : x \text{ den } y \text{ ye giden yol } \}$
olmak üzere PX bir küçük kategoridir.
Örnek 2 : X bir topolojik uzay, πX
Objeleri: X in noktaları
Morfizmaları: x den y ye giden yolların denklik sınıfı
olacak şekilde πX kategorisini oluşturalım.
Denklik bağıntısını şu şekilde tanımlayalım.
$a, b \in PX(x,y)$ ve $|a| = |b| = r$ olsun.

$$F(s,0) = a(s), \quad F(s,q) = b(s), \quad s \in [0,q]$$
$$F(0,t) = x, \quad F(r,t) = y, \quad y \in [0,q]$$

olacak şekilde $F: [0,r] \times [0,q] \to X$ sürekli fonksiyonu varsa F ye a ile b arasında homotopidir deriz ve a ile b homotopiktir denir ve aHb ile gösterilir.
Tanım 3 : $a, b \in PX(x,y)$ olsun. $a \sim b \Leftrightarrow (r+a)H(s+b)$ olacak şekilde $r, s \geq 0$ vardır.
Tanım 4 : $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun.
(i) $Ob\mathcal{D} \subseteq Obj\mathcal{C}$
(ii) $\forall x, y \in Obj\mathcal{D}$ için $\mathcal{D}(x,y) \subseteq \mathcal{C}(x,y)$
(iii) $\mathcal{D}$'nin morfizma bileşke işlemi $\mathcal{C}$'nin ki ile aynı ise $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$'nin alt kategorisi denir.
Tanım 5 : $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$'nin alt kategorisi ve $\forall x, y \in Obj\mathcal{D}$ için $\mathcal{D}(x,y) = \mathcal{C}(x,y)$ ise $\mathcal{D}$ ye $\mathcal{C}$ nin full alt kategorisi denir.
Tanım 6 : $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$ nin alt kategorisi ve $Ob\mathcal{D} = Obj\mathcal{C}$ ise $\mathcal{D}$ ye $\mathcal{C}$ nin wide alt kategorisi denir.
Tanım 7 : Her morfizması izomorfizma olan küçük kategoriye *grupoid* denir.
İddia 1 : (Esas Grupoid) X bir Topolojik uzay ise πX kategorisi bir grupoiddir.
Tanım 8 : $\mathcal{G}$ bir grupoid olsun. $\forall x, y \in Obj\mathcal{G}$ için $\mathcal{G}(x,y) \neq \emptyset$ ise $\mathcal{G}$ bağlantılıdır deriz.
Tanım 9 : $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun. $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ye bir kovaryant funktor olması için,

1. $X \in Obj\mathcal{C}$ iken $TX \in Obj\mathcal{D}$

2. $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ için $Tf \in \mathcal{D}(TX,TY)$

(Tf, f den indüklenmiş morfizma olarak adlandırılır.) olmalıdır ve T aşağıdaki koşulları sağlamalıdır.
(i) $1 : X \longrightarrow X$, $1_x \in \mathcal{C}(X,X)$ birim morfizma olmak üzere
$T1_x: TX \longrightarrow TX$, birim morfizmadır. Yani $T1_x = 1_{TX}$
(ii) $f \in \mathcal{C}(X,Y)$ ve $g \in \mathcal{C}(Y,Z)$ olmak üzere $T(gf) = TgTf$

Teorem 1 : $\mathcal{P}$, Top (topolojik uzaylar kategorisi) kategorisinden $SCat$ *kategorisine bir funktordur.*

Teorem 2 : Esas grupoid Top kategorisinden $Grpd$ *kategorisine bir funktordur.*
Sonuç 1 : $X,\ Y$ ye homeomorf ise $\pi X, \pi Y$ ye izomorftur.
Örnek 3 : $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ iki kategori olsun. $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$ kategorisinin :
Objeleri: $x_1 \in \mathrm{Obj}\mathcal{C}_1$ ve $x_2 \in \mathrm{Obj}\mathcal{C}_2$ olmak üzere (x_1, x_2) sıralı ikilileri yani
$Obj(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2) = Obj(\mathcal{C}_1) \times Obj(\mathcal{C}_2)$
Morfizmaları : $(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)((x_1, x_2),(y_1, y_2)) = \mathcal{C}_1(x_1, y_1) \times \mathcal{C}_2(x_2, y_2)$
Bileşke işlemi şöyle tanımlanır. $(b_1, b_2)(a_1, a_2) = (b_1 a_1, b_2 a_2)$
Teorem 3 : $X = X_1 \times X_2$ ise $\pi X \cong \pi X_1 \times \pi X_2$
Tanım 10 : X, Y bir topolojik uzay ve $F: X \times [0,q] \longrightarrow Y$ dönüşümü;

$$f: X \longrightarrow Y \quad f(x) = F(x,0)$$
$$g: X \longrightarrow Y \quad g(x) = F(x,1)$$

olan q uzunluğundaki bir homotopi olarak adlandırılacaktır ve F'ye f ile g arasındaki homotopidir denir.

Aslında $[0,q]$ uzunluğundaki bir homotopiyi $[0,1]$ uzunluğundaki bir homotopi olarakta düşünebiliriz.

Teorem 4 : $\forall x \in Obj\mathcal{C}$ ve $\forall y \in Obj\mathcal{D}$ için $F(x,-) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E},\ F(-,y) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ funktorları için $F(x,-)y = F(-,y)x = F(x,y)$ olsun. $a: x \longrightarrow x'$ $\mathcal{C}$ de ve b: $y \longrightarrow y'$ $\mathcal{D}$ de morfizmalar olmak üzere yukarıdaki diyagram değişmeli olsun. Bu durumda $F: \mathcal{C} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ bir funktor olur.
Teorem 5 : Homotopi funktorlar arasında bir denklik bağıntısıdır.
Teorem 6 : $f, g : X \longrightarrow Y$ homotopik dönüşüm olsun. $\pi f, \pi g : \pi X \longrightarrow \pi Y$ ye homotopiktir.
Tanım 11 : $\mathcal{D}, \mathcal{C}$ nin alt kategorisi olsun. $\mathcal{C}$ nin her objesi ile $\mathcal{D}$ nin bir objesine izomorfik ise $\mathcal{D}$ ye $\mathcal{C}$ nin representative'i denir.
Teorem 7 : $\mathcal{D}, \mathcal{C}$ nin alt kategorisi olsun. $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$ nin deformation retractidir. $\Leftrightarrow$ $\mathcal{D}$, $\mathcal{C}$ nin representative full alt kategorisidir.

Tanım 12:

$$\begin{array}{ccc} C_0 & \xrightarrow{i_1} & C_1 \\ i_2 \downarrow & & \downarrow u_1 \\ C_2 & \xrightarrow{u_2} & C \end{array}$$

diyagramı için ;

(i) $u_1 i_1 = u_2 i_2$ (diyagram değişmeli)
ve
(ii)

$$\begin{array}{ccc} C_0 & \xrightarrow{i_1} & C_1 \\ i_2 \downarrow & & \downarrow v_1 \\ C_2 & \xrightarrow{v_2} & C' \end{array}$$

$v_1 i_1 = v_2 i_2$ iken $vu_1 = v_1$, $vu_2 = v_2$ olacak şekilde tek bir $v : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ morfizması varsa

$$\begin{array}{ccc} C_0 & \xrightarrow{i_1} & C_1 \\ i_2\downarrow & & \downarrow u_1 \\ C_2 & \xrightarrow{u_2} & C \end{array}$$

diyagramına pushout tur denir.

Teorem 8 : $\mathcal{C}$ bir kategori olsun. İki pushout'un kompozisyonu yine pushout'tur.

Teorem 9 : $\mathfrak{C}, \mathfrak{D} \in Obj\mathcal{C}_\square$ ($\mathcal{C}$'de değişmeli olan kareler) ve $\mathfrak{D}$ pushout ve $c: \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ olsun .Bir $d: \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ retraction varsa $\mathfrak{C}$ de pushout tur.

X bir topolojik uzay, ve X_0, X_1, X_2 X in $X_0 = X_1 \cap X_2$ ve $X = X_1^o \cup X_2^o$ olan alt uzayları olduğunu varsayacağız.

Tanım 13: X bir topolojik uzay, $A \subset X$ olsun. A, X in her yol bileşenini kesiyorsa A ya X in represantive i denir.

Teorem 10: (Esas Grupoid için Seifert-van Kampen Teoremi) A her bir X_0, X_1, X_2 için represantive olsun.O zaman

$$\begin{array}{ccc} \pi X_0 A & \xrightarrow{i_1} & \pi X_1 A \\ i_2\downarrow & & \downarrow u_1 \\ \pi X_2 A & \xrightarrow{u_2} & \pi X A \end{array}$$

karesi grupoidler kategorisinde pushouttur.

Teorem 11 : $\pi(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ dir.

Sonuç 2 : S^1, E^2 nin retract i değildir.

İspat 1 : $r: E^2 \longrightarrow S^1$ retract olsun.

$A = \{1\}$ için $\pi E^2\,\{1\} \longrightarrow \pi S^1\{1\} = \pi(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ retract olur.

Bu durumda r örten, i birebir olur. ($\pi S^1 1 \cong \mathbb{Z}$, $\pi E^2 = 0$)

Fakat morfizmalar kümesi üzerinde ne i birebir ne de r örten olduğundan S^1, E^2 nin retract i değildir.

Tanım 14 : p:$\tilde{G}$→G bir morfizma olsun. $\forall \tilde{x} \in Ob\tilde{G}$ için $p: St_{\tilde{G}}\tilde{x} \longrightarrow St_G p\tilde{x}$ dönüşümü eşleme ise p ye örtü morfizmi denir. $\tilde{G}$ ya G nin bir örtü grupoidi denir. $\tilde{G}$ ve G bağlantılı ise p bağlantılıdır denir.

Tanım 15 : p:$\tilde{G}G$ ye herhangi bir morfizma için $\tilde{x} \in Ob\tilde{G}$ olmak üzere $G(p\tilde{x})$ nın $p(\tilde{G}(\tilde{x}))$ alt grubuna $\tilde{x}$ de p nin karakteristik grubu denir.

Ya da $\tilde{G}$ $\tilde{x}$ nın karakteristik grubu denir.

Teorem 12 : p : $\tilde{X}X$ örtü dönüşümü, $A \subset X$ ve $\tilde{A} = p^{-1}(A)$ olsun.

πp : $\pi\tilde{X}\tilde{A}$ →πXA morfizmi örtü morfizmidir.

Sonuç 3 : $\pi(S^1) \cong \mathbb{Z}$

Tanım 16 : p: $\tilde{G}$→G örtü morfizması olsun. $\tilde{G}$ nin bir $\tilde{a}$ morfizmasına $p\tilde{a}$ nın bir yükseltmesi ya da örtüsü denir.

Tanım 17 : (Noktalı Grupoid)

G bir grupoid ve *x* ∈ $ObjG$ ise *G, x* e noktalı grupoiddir denir. Noktalı morfizma ise f:*G,xH,y* , f:*GH* morfizma ve f*x=y* ise f iki noktalı grupoid arasında morfizmadır.

Tanım 18 : f:*G,xH,y* noktalı morfizmasının karakteristik grubu f nin de x de karakteristik grubudur. Ayrıca p:$\tilde{G}\tilde{x}G,x$ noktalı morfizma ve p:$\tilde{G}G$ ye örtü morfizması ise p örtü morfizmasıdır.
Teorem 13 : p:$\tilde{G}\tilde{x}\rightarrow G,x$ e örtü morfizmi ve $f : F,z \rightarrow G,x$ F bağlantılı olacak şekilde bir morfizma olsun. Bu durumda $f,\tilde{f}: F,z \rightarrow \tilde{G}\tilde{x}$ ya yükseltilebilir bir morfizmadır. $\Leftrightarrow p$ nin karakteristik grubu f nin karakteristik grubunu içerir. Bu yükseltme varsa tektir.

Kaynaklar

BROWN, R., 2006. Topology and Goupoids. Deganwy, United Kingdom, 512s.

GREENBERG, M., 1967. Lectures on Algebraic Topology. Newyork, 235s.

HU, S.T., 1964. Elements of General Topology. Holden-Day, Inc., San Francisco, Calif.-London-Amsterdam 214s.

KAMPEN, E. H. VAN., 1933. On the connection between the fundamental groups of some related spaces. Am. J. Math. 55, 261-267.

POINCARE, H., 1895. Analysis Situs, Journal Ecole Polytecnique Ser 2, 1-123s.

SEIFERT,H., 1931. Konstruction dreidimensionaler geschlossener Raume. Ber. Sachs. Akad. Wiss. 88,26-66.