Ç.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü Yıl:2008 Cilt:17-5

EN KÜÇÜK KARELER YAKLAŞIMI*

*The Least Squares Approximation**

Oray OR
Matematik Anabilim Dalı

Yusuf KARAKUŞ
Matematik Anabilim Dalı

ÖZET

Bu çalışmada X iç çarpım uzayındaki bir y elemanına en iyi yaklaşığın bulunması problemi yani en küçük kareler yaklaşımı incelendi.

Anahtar Kelimeler: İç Çarpım Uzayı, En Küçük Kareler Yaklaşımı.

ABSTRACT

In this study it was investigated the problem of finding that best approximation to y, i.e. the least square approximation , in inner product X .

Key Words: İnner Product Space, The Least Squares Approximation.

Giriş

X bir iç çarpım uzayı olmak üzere,bir y $\in X$ elemanının en küçük kareler yaklaşımı (yani bir iç çarpım uzayındaki y 'ye en yakın elemanın bulunması problemi) , bu uzayda verilen lineer bağımsız $x_1, x_2, \dots, x_n$ elemanlarının bir kombinasyonu tarafından birkaç yoldan ifade edilebilir :

(1) Verilen elemanların $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ şeklindeki bir lineer kombinasyon olarak ,

(2) x_i' lerin ortonormalleştirilmişlerinin $b_1x_1^* + b_2x_2^* + \dots + b_nx_n^*$ şeklindeki lineer kombinasyonu olarak.

Tanım 1 : Bir iç çarpım uzayında , $x_1^*, x_2^*, \dots,$ ortonormal elemanların sonlu veya sonsuz bir dizisi olsun. y , bu uzayda keyfi seçilmiş bir eleman olmak üzere;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(y, x_n^*\right) x_n^*$$

ifadesine y için bir Fourier serisi denir. (Eğer dizi sonlu ise sonlu toplam kullanılır.) Burada ; $\left(y, x_n^*\right)$ sabitleri y ' nin Fourier katsayıları olarak adlandırılır.y elemanının Fourier serisi

* Yüksek lisans Tezi –MSc Thesis

$$y \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(y, x_n^*\right) \; x_n^*$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 1 : Bir X iç çarpım uzayında , $x_1^*,\ x_2^*\ , \dots$ ortonormal bir sistem ve y keyfi seçilmiş olsun. O zaman $a_1, a_2, \dots, a_N$ sabitlerinin her seçimi için ;

$$\left\| \; y - \sum_{i=1}^{N} (y, x_i^*) \; x_i^* \; \right\| \le \left\| \; y - \sum_{i=1}^{N} a_i x_i^* \; \right\|$$

dır.

İspat:

$$\left\| \; y - \sum_{i=1}^{N} a_i x_i^* \; \right\|^2 = \left(y - \sum_{i=1}^{N} a_i x_i^* \;,\; y - \sum_{i=1}^{N} a_i x_i^* \right)$$

$$= \left(y, y\right) - \sum_{i=1}^{N} a_i \left(x_i^*, y\right) - \sum_{i=1}^{N} \overline{a_i} \left(y, x_i^*\right) + \sum_{i,j=1}^{N} a_i \overline{a_j} \left(x_i^*, x_j^*\right)$$

$$= \left(y, y\right) - \sum_{i=1}^{N} a_i \left(x_i^*, y\right) - \sum_{i=1}^{N} \overline{a_i} \left(y, x_i^*\right) + \sum_{i=1}^{N} \left| \; a_i \; \right|^2$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \left(x_i^*, y\right)\left(y, x_i^*\right) - \sum_{i=1}^{N} \left(x_i^*, y\right)\left(y, x_i^*\right)$$

$$= \left(y, y\right) - \sum_{i=1}^{N} \left| \; \left(y, x_i^*\right) \; \right|^2 + \sum_{i=1}^{N} \left| \; a_i - \left(y, x_i^*\right) \; \right|^2$$

dır. Son ifadenin ilk iki terimi a_i ' lerden bağımsız olduğu için ;

$$\left\| \; y - \sum_{i=1}^{N} a_i x_i^* \; \right\|^2$$

ifadesinin yalnız ve yalnız

$$a_i = \left(y, x_i^*\right) \;,\; i = 1, 2, \dots, N$$

olduğu zaman, yani a_i' ler y' nin katsayıları olduğu zaman, minimum değerinin elde edileceği açıktır. Bir başka deyişle , sonlu boyutlu bir iç çarpım uzayında, bu uzayın normuna göre y' ye en yakın lineer kombinasyon y için Fourier serisinin n. kısmi toplamıdır.

Nümerik analizin en küçük kare problemi, uygun bir iç çarpım uzayında , $\min_{a_i} \left\| y - \sum_{i=1}^{N} a_i x_i \right\|$ ' nin terimlerini bulmak ile formüle edilebilir. Bir sonraki sonuç bu tür problemlerin çözümünü verir.

Sonuç 1 : $x_1, x_2, \ldots, x_N$ bir iç çarpım uzayında lineer bağımsız elemanların bir kümesi olsun. $\left\| y - \sum_{i=1}^{N} a_i x_i \right\|$ 'e minimize edilmiş $x_1, x_2, \ldots, x_N$ 'nin lineer kombinasyonunu bulma problemi,

$$\sum_{i=1}^{N} \left(y, x_i^* \right) \; x_i^*$$

tarafından çözülür.

x_i^* ' lar , x_i ' lerin ortonormalleştirilmişleridir ve yukarıdaki problemin çözümü tektir. Bu bize her en küçük kare probleminin , uygun bir Fourier serisi tarafından çözüldüğünü söyler.

Sonuç 2 : $$\min_{a_i} \left\| y - \sum_{i=1}^{N} a_i x_i^* \right\|^2 = \| y \|^2 - \sum_{i=1}^{N} \left| \left(y, x_i^* \right) \right|^2$$ dır.

İspat : Teorem 1 ' in son eşitliğinde $a_i = \left(y, x_i^* \right)$ yazalım . Böylece ifade etmiş olduğumuz eşitlik elde edilir.

Örnek 1 : $$\min_{a_i} \int_{-1}^{1} \left(e^x - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 \right)^2 dx$$ problemini çözelim.

Çözüm : Burada $y = e^x$ olarak alıyoruz. Yani ;

$\min_{a_i} \left\| y - \sum_{i=1}^{N} a_i x_i \right\|$ probleminin çözümü $\sum_{i=1}^{N} \left(y, x_i^* \right) x_i^*$ olduğundan ;

$$\min_{a_i} \int_{-1}^{1} \left(e^x - \sum_{i=0}^{2} a_i x^i \right)^2 dx$$

probleminin çözümü

$$\sum_{i=0}^{2} \left(e^x, x_i^* \right) x_i^*$$

olur. $1, x, x^2, \dots$ polinomlar sisteminin ortonormaleştirilmesiyle (Davis ,P.J. , 1975) Legendre polinomları elde edileceğinden x_i^* ' lar yerine Legendre polinomlarını kullanabiliriz.Yani;

$$x_1^* = \sqrt{\frac{1}{2}} \;,\; x_2^* = \sqrt{\frac{3}{2}}\; x \;,\; x_3^* = \frac{3}{4}\sqrt{10}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

polinomlarını kullanalım.

e^x ' in Fourier katsayıları ;

$$b_0 = \int_{-1}^{1} e^x \sqrt{\frac{1}{2}}\, dx = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(e - e^{-1}\right)$$

$$b_1 = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{3}{2}}\; x\; e^x\; dx = \sqrt{\frac{3}{2}}\; (2\; e^{-1})$$

$$b_2 = \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}\sqrt{10}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) e^x dx = \frac{3\sqrt{10}}{4}\left(\frac{2e}{3} - \frac{14e^{-1}}{3}\right)$$

b_1 ve b_2 değerleri hesaplanırken kısmi integrasyon yöntemi kullanılmıştır.
Böylece ;

$$\begin{aligned} P(x) &= b_1 x_1^* + b_2 x_2^* + b_3 x_3^* \\ &= \frac{1}{2}\left(e - e^{-1}\right) + 3\; e^{-1} x + \frac{90}{16}\left(\frac{2e - 14e^{-1}}{3}\right)\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{15}{4}\left(e - 7e^{-1}\right) x^2 + 3\; e^{-1} x + \frac{33}{4} e^{-1} - \frac{3}{4} e \\ &\approx 0,537x^2 + 1,104x + 0,996 \end{aligned}$$

olur. Bu ise polinomlarla en iyi yaklaşımdır.

Örnek 2 : Eğer $f \in L^2[a,b]$ ise ,

$$\min_{a_i} \int_a^b \left(f(x) - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \right)^2 dx$$

problemi tek çözüme sahiptir.

Çözüm : Sonuç 2 ' de $y = f(x)$ ve $x_i = x^i$ alınırsa ;

$$\min_{a_i} \left\| y - \sum_{i=0}^{N} a_i x^i \right\|^2 = \min_{a_i} \int_a^b \left(f(x) - \sum_{i=1}^{N} a_i x^i \right)^2 dx$$

$$= \| f \|^2 - \sum_{i=0}^{N} \left| f(x), \ x_i^* \right|^2$$

dır. Sağ taraf pozitif ve sabittir. Ve x_i^* ortonormal elemanları Gram-Schmidt yöntemiyle tek olarak belirlendiğinden bu tek çözüme sahiptir. (Rivlin,T.J, 1966)

Kaynaklar

DAVIS,P.J.1975' Interpolation and Approximation', Dover Publication, Inc.,New York

RIVLIN,T.J., 'An Introduction To The Approximation Of Functions', Blaisdell Publishing Company,Printed in the U.S.A .1966