METABELYEN PARASERBEST LIE CEBİRLERİNDE REZİDÜLÜ PARASERBESTLİK*

Residually Parafreeness in Metabelian Parafree Lie Algebras

Zehra VELİOĞLU
Matematik Anabilim Dalı

Naime EKİCİ
Matematik Anabilim Dalı

ÖZET

Bu çalışmada 2 ya da daha fazla eleman tarafından üretilen bir metabelyen paraserbest Lie cebirinin iki ranklı rezidülü paraserbest olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Serbest Lie Cebiri, Paraserbest Lie Cebiri, Metabelyen Lie Cebiri

ABSTRACT

In this article, we prove that a metabelian parafree Lie algebra generated by 2 or more elements is residually pafaree with rank two.

Keywords: Free Lie Algebra, Parafree Lie Algebra, Metabelian Lie Algebra

GİRİŞ

Paraserbest Lie cebirleri, genel olarak, serbest Lie cebirleri ile aynı alt merkezi diziye sahip rezidülü nilpotent Lie cebirleri olarak tanımlanabilir. Paraserbest Lie cebirleriserbest Lie cebirleri ile bir çok ortak özelliğe sahip özel Lie cebirleridir.Paraserbest Lie cebiri tanımı ilk olarak Baur (1978) tarafından grup teoriden Lie cebirlerine uyarlanarak yapılmıştır. Grup teorideki paraserbestlik kavramı ilk olarak Baumslag (1967) tarafından verilmiştir. Baumslag (1969) Paraserbest grupların temel özeliklerini inceleyerekönemli sonuçlar elde etmiş ve bu sonuçları metabelyen gruplar gibi farklı sınıflarda incelemiştir. Ayrıca elde ettiği sonuçları paraserbest grup örneklerine uygulayarak somutlaştırmıştır. Daha sonra Baumslag (2005) Paraserbest grupları ile serbest gruplar karşılaştırmış ortak ve farklı özelliklerini ortaya koymuştur. Ayrıca Baumslag aynı çalışmasında açık problemlere yer vererek bu konuda henüz cevaplanmamış bir çok problemin mevcut olduğunu da vurgulamıştır.

Baur (1978)paraserbest gruplardaki gelişmelerin ışığında paraserbest Lie cebirleri için önemli sonuçlar elde etmiştir. Ayrıcaparaserbest Lie cebirlerinin evrensel enveloping cebirini ve homolojisini incelemiştir. Daha sonra Baur (1980) serbest olmayan bir paraserbest Lie cebiri örneği vermiş ve bu örnekteki Lie cebirin paraserbestlik koşullarını sağladığını göstermiştir.

Temel Tanımlar

Tanım 1: L bir Lie cebiri olsun. Eğer herhangi bir $0 \neq g \in L$ için L Lie cebirinden bir N nilpotent Lie cebirine $\psi_g(g) \neq 0$ olacak şekilde bir ψ_g homomorfizmi varsa L Lie cebirine rezidülü nilpotent denir. Bu tanıma denk olarak aşağıdaki tanımı verebiliriz:

---

* Doktora Tezi-Phd. Thesis

L Lie cebirinin alt merkezi serisinin terimlerinin kesişimi sıfır ise L Lie cebirine rezidülü nilpotent Lie cebiri denir.

Bu tanımı genelleştirmek gerekirse; P bir özellik veya Lie cebirlerin bir sınıfı olsun. Eğer $0 \neq g \in L$ olmak üzere L Lie cebirinin bir I ideali için $L/I \in P$ ve $g \notin I$ ise L Lie cebirine rezidülü P denir.

Tanım 2: L karakteristiği sıfır olan bir k halkası üzerinde tanımlı bir Lie cebiri olsun. Aşağıdaki koşulları sağlaması durumunda L Lie cebirine paraserbest Lie cebiri denir.

- **i)** L rezidülü nilpotenttir,
- **ii)** F bir X kümesi üzerinde serbest Lie cebiri olmak üzere φ: F→L doğal homomorfizmi her i ≥ 1 için φ_i : $F/\gamma_i(F) \rightarrow L/\gamma_i(L)$ izomorfizmlerini belirler.

X kümesinin kardinalitesine L Lie cebirinin rankı denir.

L bir Lie cebiri, $B \subset L, L \equiv \bar{L}(mod\, \gamma_2(L))$ ve $B \equiv \bar{B}(mod\, \gamma_2(L))$ olsun. Eğer $\bar{B}$ kümesi $\bar{L}$ yi serbestçe üretiyorsa ''B kümesi L Lie cebirini modülo $\gamma_2(L)$ serbestçe üretir'' denir.

Tanım 3: L bir paraserbest Lie cebiri ve B kümesi L paraserbest Lie cebirinin bir alt kümesi olsun. Eğer B kümesi L Lie cebirini modülo $\gamma_2(L)$ serbestçe üretiyorsa B kümesine L paraserbest Lie cebirinin paraüreteç kümesi denir. Paraüreteç kümesinin elemanlarına paraprimitif denir.

Tanım 4: P bir F serbest Lie cebiri ile aynı alt merkezi diziye sahip bir paraserbest Lie cebiri olmak üzere H, P paraserbest Lie cebirinin bir Lie alt cebiri olsun. Eğer her $n \geq 1$ için,

$$H/\gamma_n(H) \cong K/\gamma_n(K)$$

olacak şekilde F serbest Lie cebirinin bir K alt cebiri varsa H Lie cebirine paraserbest Lie alt cebir denir.

Tanım 5: P bir F serbest Lie cebiri ile aynı alt merkezi diziye sahip bir paraserbest Lie cebiri olmak üzere I, P paraserbest Lie cebirinin bir Lie ideali olsun. Eğer her n için

$$I/\gamma_n(I) \cong J/\gamma_n(J)$$

olacak şekilde F serbest Lie cebirinin bir J ideali varsa I idealine paraserbest ideal denir.

Tanım 6: P bir paraserbest Lie cebiri olsun.

$\gamma_1(P) = L$, $\gamma_2(P) = [P, P] = P'$, $\gamma_3(P)$ =[P, $\gamma_2(P)$],…,$\gamma_k(P)$= [P, $\gamma_{k-1}(P)$] ,... olmak üzere,

$$P = \gamma_1(P) \supset \gamma_2(P) \supset \gamma_3(P) \supset \ldots \supset \gamma_k(P) \supset \ldots$$

serisine P paraserbest Lie cebirinin alt merkezi serisi denir. Bu serinin k-yıncı terimi bazen P_k ile gösterilir.

Tanım 7: Bazı k tam sayıları için $\gamma_k(P)=\{0\}$ ise P paraserbest Lie cebirine nilpotent paraserbest Lie cebiri denir. $\gamma_k(P)=\{0\}$ olacak şekildeki en küçük pozitif k tam sayısına P paraserbest Lie cebirinin nilpotentlik derecesi denir.

Tanım 8: P bir paraserbest Lie cebiri olmak üzere

$$\mathrm{P}/\gamma_2(\mathrm{P}),\ \mathrm{P}/\gamma_3(\mathrm{P}),\ \mathrm{P}/\gamma_4(\mathrm{P}),\cdots$$

faktörlerine P paraserbest Lie cebirinin alt merkezi dizisi denir. P paraserbest Lie cebirinin her alt merkezi serisine bir alt merkezi dizi karşılık gelir.

P ve R herhangi iki paraserbest Lie cebiri olsun. Aşağıdakilerin sağlanması durumunda P ve R aynı alt merkezi diziye sahiptir denir.

i) k≥1 için $\theta_k\colon \mathrm{P}/\gamma_k(\mathrm{P}) \to \mathrm{R}/\gamma_k(\mathrm{R})$ izomorfizmleri vardır.

ii) Her k≥1 için θ_k izomorfizmleri $\theta_{k-1}\colon \mathrm{P}/\gamma_{k-1}(\mathrm{P}) \to \mathrm{R}/\gamma_{k-1}(\mathrm{R})$ izomorfizmlerini belirler.

Tanım 9: i= 1,2,3,…,k,… için $n_i \geq 1$ olmak üzere pozitif tamsayıların bir $\{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\}$ dizisi için P paraserbest Lie cebirinin polisentral serisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

P_{n_1}; P paraserbest Lie cebirinin alt merkezi serisinin n_1 –inci terimi,

P_{n_1,n_2}; P_{n_1} paraserbest Lie cebirinin alt merkezi serisinin n_2 –inci terimi,

$P_{n_1,\ldots,n_i,n_{i+1}} = (P_{n_1,\ldots,n_i})_{n_{i+1}}$; $P_{n_1,\ldots,n_i}$ paraserbest Lie cebirinin alt merkezi serisinin n_{i+1}-inci terimi olsun. Böylece

$$P \supseteq P_{n_1} \supseteq P_{n_1,n_2} \supseteq \ldots \supseteq P_{n_1,\ldots,n_i} \supseteq P_{n_1,\ldots,n_i,n_{i+1}} \supseteq \ldots$$

serisine P paraserbest Lie cebirinin polisentral serisi denir.

Eğer $P_{n_1,\ldots,n_k}=\{0\}$ ve $n_1, n_2, \ldots, n_k$ sayıları bu eşitlik sağlanacak şekildeki en küçük pozitif tamsayılar ise P paraserbest Lie cebirine $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ dizisine göre bir polinilpotent paraserbest Lie cebiri denir.

Eğer $n_1=n_2=2$ ve $P_{2,2}=\{0\}$ ise P Lie cebirine metabelyen paraserbest Lie cebiri denir.

Tanım 10: L bir Lie cebiri ve I, L nin bir ideali olsun. Eğer $I \cap J = 0$, $I \oplus J = L$ ve $J \cong L/I$ olacak şekilde L nin bir J alt cebiri varsa L Lie cebirine projektiftir denir. Serbest Lie cebirleri projektiftir.

Tanım 11: P_1 ve P_2 iki paraserbest Lie cebiri olsun.

$$P = \{(p_1, p_2) \colon p_1 \in P_1, p_2 \in P_2\}$$

kümesi P_1 ve P_2 nin vektör uzayı olarak direkt toplamı olsun. P üzerinde

$$[(p_1, p_2), (t_1, t_2)] = ([p_1, t_1], [p_2, t_2])$$

çarpımı tanımlansın. Bu çarpımla birlikte P bir Lie cebiridir. Bu durumda P paraserbest Lie cebirine P_1 ve P_2 paraserbest Lie cebirlerinin direkt toplamı denirve $P = P_1 \oplus P_2$ ile gösterilir. Ayrıca $P = P_1 \oplus P_2$ olması durumunda aşağıdakiler doğrudur.

i) $P' = P_1' \oplus P_2'$

ii) $p \in P$ ise $p = p_1 + p_2$, $(p_1 \in P_1$ ve $p_2 \in P_2)$ olup $P = P_1 + P_2$ dir.

iii) $P_1 \cap P_2 = \{0\}$ dır.

Tanım 12: L bir Lie cebiri olsun. L Lie cebirinden kendi üzerine olan her epimorfizmi bir izomorfizm ise L Lie cebirine hopfian denir. Bir L Lie cebirinin hopfian olması için gerek ve yeter koşul kendisinin, bir öz idealle olan bölüm cebirine izomorf olmamasıdır.

Not 13: Lie cebirleri için tanımlanan tüm izomorfizm teoremleri paraserbest Lie cebirleri için de geçerlidir.

Temel Sonuçlar

Lemma 14: Kabul edelim ki bir Y kümesi $F = F(X)$ serbest Lie cebirini modülo $\gamma_2(F)$ serbestçe üretsin. O zaman n=2,3,... için Y kümesi F serbest Lie cebirini modülo $\gamma_n(F)$ serbestçe üretir.

İspat: Bu Lemma'nın ispatı Bokut ve Kukin (1994) Lemma 2.10.1. den kolaylıkla elde edilir.

Teorem 15: Bir paraserbest Lie cebiri sonlu ranklı rezidülü paraserbesttir.

İspat: Bu teoremin ispatı Baur (1978) da bulunabilir.

Teorem 16: Üreteç sayısı 2 ya da daha fazla olan metabelyen bir P paraserbest Lie cebiri iki ranklı rezidülü paraserbesttir.

İspat: P, 2 ya da daha fazla üretece sahip bir metabelyen paraserbest Lie cebiri olsun. Teorem 15 den P Lie cebiri sonlu n ranklıdır $(n \geq 2)$. $0 \neq a \in P$ olsun. P paraserbest olduğundan bazı $c \geq 2$ için $a \notin \gamma_c(P)$ dir. $P/\gamma_c(P)$ bölüm cebiri serbest metabelyen ve nilpotenttir. H, P paraserbest Lie cebirinin $a \notin H$ ve $H \supseteq \gamma_c(P)$ olacak şekildeki bir alt cebiri olsun. O halde

$$\left. {}^{P}\!/_{\gamma_c(P)} \middle/ {}^{H}\!/_{\gamma_c(P)} \right.$$

bölüm cebirinin rankı 2 olup serbesttir. Serbest Lie cebirleri projektif olduklarından $P/\gamma_c(P)$ bölüm cebirinin bir $H/\gamma_c(P)$ideali için

$$P/\gamma_c(P) \cong H/\gamma_c(P) \oplus L/\gamma_c(P) \text{ ve } H/\gamma_c(P) \cap L/\gamma_c(P) = 0$$

olacak şekilde $P/\gamma_c(P)$ bölüm cebirinin bir $L/\gamma_c(P)$ alt cebiri vardır öyle ki

$$L/\gamma_c(P) \cong \left. {}^{P}\!/_{\gamma_c(P)} \middle/ {}^{H}\!/_{\gamma_c(P)} \right.$$

dir. Şimdi $P/\gamma_2(P)$ yi hesaplayalım:

$$P/\gamma_2(P) \cong \left. {}^{P}\!/_{\gamma_c(P)} \middle/ \gamma_2\left(P/\gamma_c(P)\right) \right.$$

dir.

$$P/\gamma_c(P) \cong H/\gamma_c(P) \oplus L/\gamma_c(P)$$

olduğundan

$$\left.{}^{P}/_{\gamma_c(P)}\right/_{\gamma_2\left({}^{P}/_{\gamma_c(P)}\right)} = \left.\left({}^{H}/_{\gamma_c(P)} \oplus {}^{L}/_{\gamma_c(P)}\right)\right/_{\gamma_2\left({}^{H}/_{\gamma_c(P)} \oplus {}^{L}/_{\gamma_c(P)}\right)}$$

olur. Eşitliğin sağ tarafındaki bölüm cebirinin payda kısmındaki ifadeyi hesaplayalım.

$$\gamma_2\left({}^{H}/_{\gamma_c(P)} \oplus {}^{L}/_{\gamma_c(P)}\right) = \left[{}^{H}/_{\gamma_c(P)} \oplus {}^{L}/_{\gamma_c(P)}, {}^{H}/_{\gamma_c(P)} \oplus {}^{L}/_{\gamma_c(P)}\right]$$

$$= {}^{[H,H]\oplus[H,L]\oplus[L,L]}/_{\gamma_c(P)}$$

$$= {}^{\gamma_2(H)\oplus[H,L]\oplus\gamma_2(L)}/_{\gamma_c(P)}$$

elde edilir. O halde

$$\left.\left({}^{H}/_{\gamma_c(P)} \oplus {}^{L}/_{\gamma_c(P)}\right)\right/_{\gamma_2\left({}^{H}/_{\gamma_c(P)} \oplus {}^{L}/_{\gamma_c(P)}\right)}$$

$$= \left.\left({}^{H}/_{\gamma_c(P)} \oplus {}^{L}/_{\gamma_c(P)}\right)\right/_{(\gamma_2(H)\oplus[H,L]\oplus\gamma_2(L))/_{\gamma_c(P)}}$$

$$= \left.\left({}^{H}/_{\gamma_c(P)}\right)\right/_{(\gamma_2(H)\oplus[H,L])/_{\gamma_c(P)}} \oplus \left.\left({}^{L}/_{\gamma_c(P)}\right)\right/_{\gamma_2(L)/_{\gamma_c(P)}}$$

$$= \left.\left({}^{H}/_{\gamma_c(P)}\right)\right/_{(\gamma_2(H)\oplus[H,L]+\gamma_c(P))/_{\gamma_c(P)}} \oplus \left.\left({}^{L}/_{\gamma_c(P)}\right)\right/_{(\gamma_2(L)+\gamma_c(P))/_{\gamma_c(P)}}$$

$$= {}^{H}/_{\gamma_2(H)\oplus[H,L]+\gamma_c(P)} \oplus {}^{L}/_{\gamma_2(L)+\gamma_c(P)}$$

elde edilir. O halde

$${}^{P}/_{\gamma_2(P)} = {}^{H}/_{\gamma_2(H)\oplus[H,L]+\gamma_c(P)} \oplus {}^{L}/_{\gamma_2(L)+\gamma_c(P)}$$

${}^{P}/_{\gamma_2(P)}$ bölüm cebirinin n ranklı serbest abelyen olduğunu biliyoruz. Ayrıca L Lie cebirinin seçiminden ve ${}^{L}/_{\gamma_2(L)+\gamma_c(P)}$ bölüm cebiri 2 ranklı serbest abelyen olduğundan ${}^{H}/_{\gamma_2(H)\oplus[H,L]+\gamma_c(P)}$ cebiri n-2 ranklı serbest abelyen olur. $a_1, \dots, a_{n-2} \in H, a_{n-1}, a_n \in L$ olsun öyle ki $a_1, \dots, a_{n-2}$ elemanları H Lie cebirini modülo $\gamma_2(H)\oplus[H,L]+\gamma_c(P)$ serbestçe üretir. Benzer şekilde a_{n-1},a_n elemanları L Lie cebirini modülo $\gamma_2(L)+\gamma_c(P)$ serbestçe üretir. Hopfianlıktan $a_1,\dots,a_n$ elemanları P Lie cebirini modülo $\gamma_2(P)$ serbestçe üretir. O halde yine hopfianlıktan, I, $\{a_1,\dots,a_{n-2}\}$ tarafından üretilen ideal olmak üzere $H=I+\gamma_c(P)$ eşitliğini yazabiliriz. Şimdi I idealini ele alalım.

$$J/I=\bigcap_{n=1}^{\infty}\gamma_n(P/I)$$

olsun. Şimdi P/J idealinin metabelyen paraserbest olduğunu ve $a\notin J$ olduğunu gösterelim. $a\notin H$ olduğundan $a\notin J$ olduğu açıktır. O halde geriye P/J paraserbest olduğunu göstermek kalır. J idealinin tanımından P/J bölüm cebiri rezidülü nilpotenttir. $a_1,\dots,a_n$ elemanları P Lie cebirini modülo $\gamma_2(P)$ serbestçe ürettiğinden ve Lemma 14 den her $c\geq 1$ için $a_1,\dots,a_n$ elemanları P Lie cebirini modülo $\gamma_c(P)$ serbestçe üretir. O halde $P/(I+\gamma_c(P))$ cebiri serbest metabelyen olup rankı 2 dir. J ideali P Lie cebirinin P/J bölüm cebiri rezidülü nilpotent olacak şekildeki I yı içeren en küçük ideali olarak seçilmişti. O halde $J\subseteq(I+\gamma_c(P))$ olur. Böylece

$$P/(I+\gamma_c(P))=\frac{P/J}{(I+\gamma_c(P))/J}=\frac{P/J}{\gamma_c(P/J)}$$

yazılabilir. $P/(I+\gamma_c(P))$ cebiri serbest olduğundan, $\dfrac{P/J}{\gamma_c(P/J)}$ cebiri de serbesttir. O halde P/J paraserbesttir.

Kaynaklar

BAUMSLAG, G., 1967. Groups with the same lower central sequence as a relatively free group I. The groups. Trans. Amer. Math. Soc., 129, 308-321.

BAUMSLAG, G., 1969. Groups with the same lower central sequence as a relativelyfree group. II Properties. Trans. Amer. Math. Soc., 142, 507-538.

BAUMSLAG, G., 2005. Parafree groups. Progress in Math., Vol. 248, 1-14.

BAUR, H., 1978. Parafreie Liealgebren und homologie. Diss. Eth Nr., 6126, Zürich, 60p.

BAUR, H., 1980. A note on parafree Lie algebras. Commun. in Alg., Vol 8, No 10, 953-960.

BOKUT, L.,A., KUKİN, G.P., 1994. Algoritmic and Combinatorial Algebra. Kluwer Academic Publishers, Dortecht, The Netherlands, 255p.