EVRENSEL GROBNER BAZININ VARLIĞININ BİR TOPOLOJİK İSPATI*

A Topologıcal Proof for Existence of Unıversal Grobner Bases

Osman UYAR
Matematik Anabilim Dalı

Ali ÖZKURT
Matematik Anabilim Dalı

ÖZET

Bu çalışmada bir yarı grup üzerindeki sol sıralamaların kümesi üzerine konulan bir topolojiden bahsedildi ve bu uzayın kompakt olduğu gösterildi. Serbest abelyen gruplar üzerindeki sol sıralamaların bu topoloji ile Cantor kümesine homeomorf olduğu gösterildi ve polinom halkalarında evrensel Grobner bazının varlığı için yeni bir ispat verildi.
Anahtar Kelimeler : Sol ve Sağ Sıralamalar, Tamamen Bağlantısız Uzay, Cantor Kümesi, Grobner Bazı

ABSTRACT

In this thesis, it is mentioned about a topology on left orderings of any arbitrary semi group and it is shown that this space is compact and for free abelian group, it is shown to be homemorphic to the Cantor set. An application of this result is a new proof of the existence of universal Grobner bases.
Keywords : Left and Rıght Orderings, Totally Disconnected Spaces, Cantor Set, Grobner Bases

Giriş

Bir polinom halkasında bir idealin bir Grobner bazı bu polinom halkasındaki monomialler üzerindeki sıralamaya bağlı olarak değişir. Fakat sıralamaya bağlı kalmaksızın o idealin Grobner bazı olan bir küme vardır. Bu kümeye o idealin evrensel Grobner bazı denir. Evrensel Grobner bazının varlığının tamamı ile cebirsel bir ispatı vardır. (N. Schwartz, 1998)

Bu çalışmada evrensel Grobner bazının varlığını topolojik argümanlarla ispatlayan, (Adam S. Sikora, 2004) Adam S. Sikora tarafından yazılmış bir makale incelenmiştir.

Bu makalede herhangi bir yarı grup üzerindeki sol sıralamalar üzerinde özel bir topolojiden bahsedildi ve bu topoloji ile serbest abelyen gruplar üzerindeki sol sıralamaların Cantor kümesine homeomorf olduğu gösterildi. Son olarak evrensel Grobner bazının varlığının topolojik bir ispatı verildi.

YARI GRUPLARDA SIRALAMA

Assosyatif ikili işleme sahip G yarı grubu verilsin. G üzerindeki bir lineer $'<'$ sıralaması $a, b \in G$ olmak üzere her $c \in G$ için eğer $a < b$ iken $ca < cb$ oluyorsa sol sıralama, eğer $a < b$ iken $ac < bc$ oluyorsa sağ sıralama olarak

* Yüksek Lisans Tezi-MSc. Thesis

tanımlanır. G yarı grubunun tüm sol ve sağ sıralamalarının kümesi sırasıyla $LO(G)$ ve $RO(G)$ ile gösterilir. Buna göre $LO(G) = \{< \mid <, G$ yarı grubu üzerinde bir sol sıralamadır$\}$ ve $RO(G) = \{< \mid <, G$ yarı grubu üzerinde bir sağ sıralamadır$\}$ şeklinde gösterilir. Eğer G bir grup ise $LO(G)$ ve $RO(G)$ kümeleri arasında her sol sıralamaya bir sağ sıralamayı karşılık getiren bire-bir eşleme vardır. Yani $a <_r b \Leftrightarrow a^{-1} <_l b^{-1}$ olur.

Tanım 1: $U_{a,b} = \{<\in LO(G) \mid a, b \in G$ için $a < b\} \subset LO(G)$ olsun. $LO(G)$ üzerine $U_{a,b}$ kümelerini açık kabul eden en küçük topolojiyi koyalım. Bu topolojideki her açık küme $U_{a_1,b_1} \cap \ldots \cap U_{a_n,b_n}$ şeklindeki kümelerin bir birleşimidir.

Tanım 2: G'nin alt kümelerinin $G_0 \subset G_1 \subset \cdots \subset G$ olan keyfi tam filtrasyonu ($\bigcup_{i\in I} G_i = G$) verilsin. $<_1, <_2 \in LO(G)$ için $\rho: LO(G) \times LO(G) \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonunu

$$\rho(<_1, <_2) = \begin{cases} 1/2^r, & \mathrm{r} = \max\{r \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid a, b \in G_r, a <_1 b \Leftrightarrow a <_2 b\} \text{ ise} \\ 0, & \max\{r \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid a, b \in G_r, a <_1 b \Leftrightarrow a <_2 b\} \text{ yoksa} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.

Önerme 3: ρ, $LO(G)$ üzerinde bir metriktir ve bu metriğin oluşturduğu $LO(G)$ üzerindeki topoloji ile Tanım 1'de tanımlanan topoloji çakışır. Dolayısıyla bu topoloji filtrasyonun seçiminden bağımsızdır.

İspat: Öncelikle Tanım 2'de tanımlanan ρ fonksiyonunun $LO(G)$ üzerinde bir metrik olduğunu gösterelim.

i) $<_1, <_2 \in LO(G)$ için $\rho(<_1, <_2) = 1/2^r$ ve ya $\rho(<_1, <_2) = 0$ olduğu için daima $\rho(<_1, <_2) \geq 0$ olur.

ii) $<_1, <_2 \in LO(G)$ için $\rho(<_1, <_2) = 0 \Leftrightarrow <_1 = <_2$ olduğunu göstermeliyiz. $<_1 = <_2$ olsun. Her $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $<_1 |G_r = <_2 |G_r$ olur. $max\{r \mid <_1 |G_r = <_2 |G_r\}$ yoktur. Buna göre $\rho(<_1, <_2) = 0$ olur. $\rho(<_1, <_2) = 0$ olsun. $max\{r \mid <_1 |G_r = <_2 |G_r\}$ yoktur. O halde her $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $<_1 |G_r = <_2 |G_r$ olup $G = \bigcup_{r=0}^{\infty} G_r$ olduğu için $<_1 = <_2$ olur. Sonuç olarak $\rho(<_1, <_2) = 0 \Leftrightarrow <_1 = <_2$ olur.

iii) $<_1, <_2 \in LO(G)$ için $\rho(<_1, <_2) = \rho(<_2, <_1)$ olduğunu göstermeliyiz. $\rho(<_1, <_2) = 0$ olsun. $<_1 = <_2$ olup $\rho(<_1, <_2) = \rho(<_2, <_1)$ olur. $\rho(<_1, <_2) \neq 0$ olsun. $r = max\{r \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid a, b \in G_r\ a <_1 b \Leftrightarrow a <_2 b\}$ olmak üzere $\rho(<_1, <_2) = 1/2^r$ ve $s = max\{r \in \mathbb{N} \cup \{0\} \mid a, b \in G_r\ a <_2 b \Leftrightarrow a <_1 b\}$ olmak üzere $\rho(<_2, <_1) = 1/2^s$ olup $r = s$ olmalıdır. Sonuç olarak $\rho(<_1, <_2) = \rho(<_2, <_1)$ olur.

iv) $<_1, <_2, <_3 \in LO(G)$ için $\rho(<_1, <_2) \leq \rho(<_1, <_3) + \rho(<_2, <_3)$ olduğunu göstermeliyiz. $\rho(<_1, <_2) = 0$ ise $\rho(<_1, <_2) \leq \rho(<_1, <_3) + \rho(<_2, <_3)$ olduğu açıktır. $\rho(<_1, <_2) \neq 0$ olsun. $q = max\{r \mid <_1 |G_r = <_2 |G_r\}$ olmak üzere $\rho(<_1, <_2) = 1/2^q$ olur. Bu durumda $\rho(<_1, <_3) = 0$ ise $<_1 = <_3$

olup $q = max\{r|<_1 |G_r =<_2|G_r\} = max\{r|<_3 |G_r =<_2 |G_r\}$ olur. Buna göre $\rho(<_2,<_3) = 1/2^q$ olur. $\rho(<_2,<_3) = 0$ olup $q = max\{r|<_1 |G_r = <_2|G_r\} = max\{r|<_1 |G_r =<_3 |G_r\}$ olur. Böylelikle $\rho(<_3,<_1) = 1/2^q$ olur. Şimdi $\rho(<_1,<_3) \neq 0$ olsun. $s = max\{r|<_1 |G_r =<_3 |G_r\}$ olmak üzere $\rho(<_1,<_3) = 1/2^s$ olur. Eğer $\rho(<_2,<_3) \neq 0$ ise $t = max\{r|<_2 |G_r = <_3 |G_r\}$ olmak üzere $\rho(<_2,<_3) = 1/2^t$ olur. $1/2^q \leq 1/2^s + 1/2^t$ olduğunu göstermeliyiz. $s \geq t$ olduğunu varsayabiliriz. Eğer $q \geq s$ ise $1/2^q \leq 1/2^s$ olup eşitsizlik sağlanır. Şimdi $q < s$ olsun. $t < q < s$ ise $<_2 |G_q =<_3 |G_q$ olup $t = max\{r|<_2 |G_r =<_3 |G_r\}$ olmasıyla çelişir. $t = q$ ise $1/2^q \leq 1/2^s + 1/2^t$ eşitsizliği sağlanır. $t > q$ ise $<_1 |G_t =<_2 |G_t$ olup $q = max\{r|<_1 |G_r =<_2|G_r\}$ olmasıyla çelişir. Sonuç olarak $\rho(<_1,<_2) \leq \rho(<_1,<_3) + \rho(<_2,<_3)$ olur.

Bu önerme ile birlikte iki durum ortaya çıkar.

1. Her $B(<_0, 1/2^r)$ açık yuvarı Tanım 1'de tanımlanan topolojiye göre açıktır.

İspat: $<_1 \in B(<_0, 1/2^r) \Leftrightarrow \rho(<_1,<_0) < 1/2^r \Leftrightarrow <_1 |G_{r+1} =<_0 |G_{r+1}$ olup $a,b \in G_{r+1}$ olmak üzere $B(<_0, 1/2^r) = \bigcap_{a<_0 b} U_{a,b}$ olur.

2. Her $U_{a_1,b_1} \cap \dots \cap U_{a_n,b_n}$ kümesi ρ metriğine göre açıktır. Yani her $<_0 \in U_{a_1,b_1} \cap \dots \cap U_{a_n,b_n}$ için $B(<_0, 1/2^r) \subset U_{a_1,b_1} \cap \dots \cap U_{a_n,b_n}$ olan r değeri vardır.

İspat: $\emptyset \neq U_{a_1,b_1} \cap \dots \cap U_{a_n,b_n}$ açık kümesi için $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n \in G_r$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{N}$ vardır. $<_0 \in U_{a_1,b_1} \cap \dots \cap U_{a_n,b_n}$ alalım. $B(<_0, 1/2^r) \subset U_{a_1,b_1} \cap \dots \cap U_{a_n,b_n}$ olduğunu gösterelim. $<_1 \in B(<_0, 1/2^r)$ alalım. $<_1 |G_{r+1} =<_0 |G_{r+1}$ olur. Dolayısıyla her i$\in \{1,2,\dots,n\}$ için $a_i <_1 b_i$ olur. O halde $<_1 \in U_{a_1,b_1} \cap \dots \cap U_{a_n,b_n}$ olup $B(<_0, 1/2^r) \subset U_{a_1,b_1} \cap \dots \cap U_{a_n,b_n}$ olur.

Teorem 4: $LO(G)$ kompakttır, tamamen bağlantısız topolojik uzaydır.

İspat: Önce $LO(G)$'nin tamamen bağlantısız olduğunu gösterelim. $<_1 \neq <_2$ olmak üzere $<_1, <_2 \in LO(G)$ alalım. $<_1 \in U_{a,b}$, $<_2 \in U_{b,a}$, $U_{a,b} \cup U_{b,a} = LO(G)$ ve $U_{a,b} \cap U_{b,a} = \emptyset$ olacak şekilde $a \neq b$ olan $a, b \in G$ olduğunu göstereceğiz. $<_1 \neq <_2$ olan $<_1, <_2$ lineer sıralamaları için $a \neq b$ olan $\exists (a,b) \in G \times G$ vardır öyle ki $a <_1 b$ ise $b <_2 a$ olur. O halde $<_1 \in U_{a,b}$ ve $<_2 \in U_{b,a}$ olur. Ayrıca $U_{a,b} \cup U_{b,a} = LO(G)$ ve $U_{a,b} \cap U_{b,a} = \emptyset$ olup $LO(G)$ tamamen bağlantısızdır.

Şimdi de $LO(G)$'nin kompakt olduğunu gösterelim. $G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_r \subset \cdots$ olmak üzere $<_n: <_1, <_2, \dots, <_n, \dots \in LO(G)$ dizisini alalım. $(<_n)$ dizisinin G_1'de aynı olan $(<_{i_n}^1)$ alt dizisi, G_2'de aynı olan $(<_{i_n}^2)$ alt dizisi vardır. Bu şekilde devam edersek her $r \in \mathbb{N}$ için $G_1, G_2, \dots, G_r$'ler sonlu elemanlı olmak üzere $(<_n)$ dizisinin G_r'de aynı olan $(<_{i_n}^r)$ alt dizisi vardır.

$<_{i_1}^1, <_{i_2}^1, <_{i_3}^1, \ldots$
$<_{i_1}^2, <_{i_2}^2, <_{i_3}^2, \ldots$
.
.
.
$<_{i_1}^r, <_{i_2}^r, <_{i_3}^r, \ldots$

olmak üzere $(<_n)$ dizisinin $<_{k_n} = <_{i_n}^n$ şeklindeki $(<_{k_n})$ alt dizisini düşünelim. Yani $<_{k_n}: <_{i_1}^1, <_{i_2}^2, <_{i_3}^3, \ldots$ şeklindedir. $(<_{k_n})$ alt dizisini $<^1, <^2, <^3, \ldots$ ile gösterelim. Aşağıdaki lemma ile bu dizinin yakınsak olduğunu göstereceğiz. Böylece $LO(G)$'nin kompakt olduğunu göstermiş olacağız.

Lemma 5: $<^{\mathbf{1}}, <^{\mathbf{2}}, <^{\mathbf{3}}, \ldots$ dizisi, $a <^\infty b \Leftrightarrow a <^n b$ (sonlu tane n dışında) olarak tanımladığımız $<^\infty$ sıralamasına yakınsar.

İspat: Önce yukarıda tanımladığımız $<^\infty$ sıralaması için aşağıdaki özellikleri gösterelim.

i) $<^\infty$ sıralaması bir tam sıralamadır.

$a, b \in G$ olsun. $\exists r \in \mathbb{N}$ için $a, b \in G_r$ olur. $<^r = <_{i_n}^r$ olmak üzere ($<_{i_n}^r: (<_n)$ dizisinin G_r'de aynı olan alt dizisi)

$<_{i_1}^1, <_{i_2}^1, \ldots, <_{i_n}^1$, $(<_n)$ dizisinin G_1'de aynı olan alt dizisi
$<_{i_1}^2, <_{i_2}^2, \ldots, <_{i_n}^2$, $(<_n)$ dizisinin G_2'de aynı olan alt dizisi
.
.
.
$<_{i_1}^r, <_{i_2}^r, \ldots, <_{i_n}^r$, $(<_n)$ dizisinin G_r'de aynı olan alt dizisi
$<_{i_1}^{r+1}, <_{i_2}^{r+1}, \ldots, <_{i_n}^{r+1}$, $(<_n)$ dizisinin G_{r+1}'de aynı olan alt dizisi

olup $j > r$ için G_r'de aynı olan $(<_{i_n}^j)$ alt dizisinin terimleri G_j'de aynı olur. $G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_{r-1} \subset G_r \subset \cdots \subset G_j$ olduğundan $G_0, G_1, \ldots, G_j$'de aynı olur. O halde $a, b \in G_r$ için $(<_n)$ dizisinin $i > r$ için tüm terimleri G_r'de aynı olur. Buna göre $i > r$ için ya $a <^i b$ ya da $b <^i a$ olup ya $a <^\infty b$ ya da $b <^\infty a$ olur. Böylece $<^\infty$ sıralaması bir tam sıralamadır.

ii) $<^\infty$ sıralaması bir sol sıralamadır.

$a, b \in G$ olmak üzere $a <^\infty b$ ise $a <^n b$ (sonlu tane n dışında) olur. O halde her $c \in G$ için $ca <^n cb$ (sonlu tane n dışında) olup $ca <^\infty cb$ olur. Böylece $<^\infty$ sıralaması bir sol sıralamadır.

Şimdi $<_{k_n}\to<^{\infty}$ olduğunu gösterelim. $r = max\{r|<^{n}|G_r =<^{\infty} |G_r\}$ olmak üzere $a, b \in G_r$ alalım. O halde $a <^{r} b \Leftrightarrow a <^{\infty} b$ olur. $a <^{\infty} b \Leftrightarrow a <^{n} b$ (sonlu tane n dışında) fakat $a <^{r} b$'dir. $\rho(<^{\infty}, <^{n}) = 1/2^{r} \leq 1/2^{n}$ olup $\rho(<^{\infty}, <^{n}) \leq 1/2^{n}$ olur. Böylece $<_{k_n}\to<^{\infty}$ olur.

Sonuç 6: $LO(G)$ Cantor kümesidir $\Leftrightarrow$

i) $LO(G) \neq \emptyset$

ii) Her $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in G$ için $U_{a_1,b_1} \cap \ldots \cap U_{a_n,b_n} = \emptyset$ ve ya sonsuz elemanlıdır.

İspat: ii) koşulu $LO(G)$ kümesinin perfect olduğunu söyler. Dolayısıyla boştan farklı her kompakt, metrik, perfect ve tamamen bağlantısız uzay Cantor kümesine homeomorf olduğundan ispat tamamlanır.

Önerme 7: $n > 1$ için $LO(\mathbb{Z}^n)$ Cantor kümesine homeomorfiktir.

İspat: Varsayalım ki bir $m > 1$ için $LO(\mathbb{Z}^m)$ Cantor kümesine homeomorf olmasın. $n = min\{m|m > 1$ ve $LO(\mathbb{Z}^m)$ Cantor kümesine homeomorf değildir$\}$ olsun. $LO(\mathbb{Z}^n)$ Cantor kümesine homeomorf olmadığından Sonuç 6'dan (a_1, b_1),(a_2, b_2) ,…,$(a_s, b_s) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n$ vardır öyle ki $U_{a_1,b_1} \cap U_{a_2,b_2} \cap \ldots \cap U_{a_s,b_s} = \{<\in LO(\mathbb{Z}^n)|$ her $i \in \{1,2, \ldots, s\}$ için $a_i < b_i\}$ sonlu bir kümedir. Gerektiğinde sonlu sayıda farklı nokta çifti ekleyerek genelliği bozmaksızın $U_{a_1,b_1} \cap U_{a_2,b_2} \cap \ldots \cap U_{a_s,b_s}$ kümesini tek elemanlı varsayabiliriz. Öte yandan $i \neq j$ iken $(b_j - a_j)$ vektörünün $(b_i - a_i)$ vektörünün bir rasyonel katı olmadığını varsayabiliriz. Yani $i \neq j$ iken $m(b_j - a_j) = n(b_i - a_i)$ olacak şekilde $m, n \in \mathbb{Z}$ yoktur. $U_{a_1,b_1} \cap U_{a_2,b_2} \cap \ldots \cap U_{a_s,b_s}$=$\{<\}$ olsun. $v_1, v_2 \in \mathbb{Q}^n$ alalım. $v_1 < v_2 \Leftrightarrow$ her $n \in \mathbb{Z}^n$ için $nv_1, nv_2 \in \mathbb{Z}^n$ olmak üzere $nv_1 < nv_2$ olur. Böylelikle $<$ sıralamasını $\mathbb{Q}^n$'e genişletmiş oluruz. Şimdi $H = \{x \in \mathbb{R}^n|x$'in $\mathbb{Q}^n$'deki her komşuluğu pozitif ve negatif elemanlar içerir$\}$ olmak üzere $\mathbb{Q}^n \otimes \mathbb{R} \supset H$ kümesini alalım. Buna göre $x \in H \Leftrightarrow x \in U \subset \mathbb{R}^n$ açık alt kümesi için bir $v, w \in U \cap \mathbb{Q}^n$ vardır öyle ki $0 < v$ ve $w < 0$ olur. H, $\mathbb{R}^n$'de bir hiper düzlemdir. Aslında bir $\alpha \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ vardır öyle ki $H = \{x|\langle\alpha, x\rangle = 0\}$ olur. $H_+ = \{x|\langle\alpha, x\rangle > 0$ ve $H_- = \{x|\langle\alpha, x\rangle < 0\}$ olmak üzere $\mathbb{R}^n \setminus H$, H_+ ve H_- bağlantılı bileşenlerinden oluşur. $\mathbb{R}^n \setminus H = H_+ \cup H_-$ için $x \in H_+$ ise $x > 0$ ve $x \in H_-$ ise $x < 0$ olur. Her $i \in \{1,2, \ldots, s\}$ için $a_i < b_i$ idi. $a = \{a_i^1, \ldots, a_i^n\} \in \mathbb{Z}^n$ ve $b = \{b_i^1, \ldots, b_i^n\} \in \mathbb{Z}^n$ olmak üzere $b_i - a_i = (b_i^1 - a_i^1, \ldots, b_i^n - a_i^n) > 0$ olur. $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ olmak üzere $\langle\alpha, b_i - a_i\rangle = \alpha_1(b_i^1 - a_i^1) + \cdots + \alpha_n(b_i^n - a_i^n)$ olur. Böylece $b_i - a_i \in H_+$ ya da $b_i - a_i \in H$ olur. $I = \{i|b_i - a_i \in H\}$ olsun. Dikkat edilirse $\{<' \in LO(H \cap \mathbb{Z}^n)|$ Her $i \in I$ için $a_i <' b_i\} = \{<\}$ olur. Aksi taktirde $<' \in LO(H \cap \mathbb{Z}^n)$ ve her $i \in I$ için $a_i <' b_i$ ise $<'$, $\mathbb{Z}^n$ üzerinde dolayısıyla $\mathbb{Q}^n$ üzerinde her $i \in \{1,2, \ldots, s\}$ için $a_i < b_i$ olacak şekilde bir sıralamaya genişletilebilir. Bu bir çelişkidir. Çünkü $\mathbb{Q}^n$ üzerinde $i \in \{1,2, \ldots, s\}$ için $a_i < b_i$ olacak şekilde bir tek sıralama vardır. O halde $H \cap \mathbb{Z}^n$ Sonuç 6'nın koşulunu sağlamıyor.

$I = \{i_1, \dots, i_k\}$ sonlu bir küme olmak üzere $a_{i_1} < b_{i_1}$,…,$a_{i_k} < b_{i_k}$ olacak şekilde bir tek $<$ sıralaması vardır. Yani öyle (a_{i_1}, b_{i_1}),…,$(a_{i_k}, b_{i_k}) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n$ vardır öyle ki $U_{a_{i_1}, b_{i_1}} \cap \dots \cap U_{a_{i_k}, b_{i_k}}$sonludur. Öte yandan $H \cap \mathbb{Z}^n \subset H$ ve $\dim(H \cap \mathbb{Z}^n) \leq n - 1$ olur. Ayrıca kabulümüzden $LO(H \cap \mathbb{Z}^n)$ Cantor kümesine homeomorfiktir. Dolayısıyla ya $H \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$ ya da $H \cap \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}$ olur. Eğer $H \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$ ise $I = \emptyset$ olur. Her $i \in \{1,2, \dots, s\}$ için $b_i - a_i \in H_+$ olur. Dolayısıyla sonsuz çoklukta $H' \subset \mathbb{R}^n$ hiper düzlemleri ve bu hiper düzlemlere karşılık gelen $\mathbb{Q}^n$ üzerinde $<'$ sıralamaları vardır öyle ki $i \in \{1,2, \dots, s\}$ için $a_i <' b_i$ olur. Bu bir çelişkidir. Eğer $H \cap \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}$ ise I tek elemanlıdır. Çünkü $i \neq j$ iken $(b_j - a_j)$ vektörü $(b_i - a_i)$ vektörünün rasyonel katı değildi. Bir tek $i_0 \in \{1,2, \dots, s\}$ için $b_{i_0} - a_{i_0} \in H$ olur. Dolayısıyla sonsuz çoklukta $H' \subset \mathbb{R}^n$ hiper düzlemleri vardır öyle ki $i \in \{1,2, \dots, s\} - \{i_0\}$ için $(b_{i_0} - a_{i_0})$ ile $(b_i - a_i)$ vektörleri aynı bileşende olur. Dolayısıyla $\mathbb{Q}^n$ üzerinde sonsuz çoklukta $<'$ sıralamaları için $a_i <' b_i$ olurdu ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $H \cap \mathbb{Z}^n \neq \emptyset$ ve $H \cap \mathbb{Z}^n \neq \mathbb{Z}$ olur. $LO(H \cap \mathbb{Z}^n)$ Cantor kümesine homeomorf değildir. Bu bir çelişkidir. Çünkü $(H \cap \mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$ olduğundan $1 < dim(H \cap \mathbb{Z}^n) \leq n - 1$ olur ki $LO(\mathbb{Z}^n)$ Cantor kümesine homeomorf olmayacak şekildeki 1'den büyük en küçük doğal sayı n idi.

GROBNER BAZINA BİR UYGULAMA

$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir polinom halkası olsun. $\mathbb{Z}^n_{\geq 0} = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{Z}$ ve $x_i \geq 0\}$ olmak üzere $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ polinom halkası içindeki $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ monomialleri, $x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$'leri $(i_1, \dots, i_n)$'e götüren izomorfizma ile $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$'a izomorfik olan bir monoidi belirler. $(x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n})$ ve $(x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n})$ monomialleri için $(x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}).\left(x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n}\right) = (x_1^{i_1+j_1} \dots x_n^{i_n+j_n})$ olur. $(x_1^0 \dots x_n^0) = 1$, bu monoidin birim elemanıdır. Bir G kümesi üzerindeki bir lineer sıralama, eğer G'nin her alt kümesi bir en küçük elemana sahipse iyi sıralamadır. G yarı grubu için G'nin tüm iyi sol sıralamalarının kümesini $LWO(G)$ ile gösteririz. $LWO(\mathbb{Z}^n_{\geq 0})$ kümesinin elemanları $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ içindeki monomiallerin sıralaması olarak adlandırılır. $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ üzerindeki bir $<$ sol sıralaması bir iyi sıralamadır ancak ve ancak 0, bu sıralama için en küçük elemandır. Buna göre $LWO(\mathbb{Z}^n_{\geq 0}) = LO(\mathbb{Z}^n_{\geq 0}) - (\cup U_{a,0})$ olur. $U_{a,0}$ açık olduğu için aşağıdaki sonucu söyleyebiliriz.

Sonuç 1: $LWO(\mathbb{Z}^n_{\geq 0})$, $LO(\mathbb{Z}^n_{\geq 0})$'ın bir kapalı alt kümesidir. Buna göre $LWO(\mathbb{Z}^n_{\geq 0})$ kompakttır.

Bunun yanında hem $LWO(\mathbb{Z}^n_{\geq 0})$ hem de $LO(\mathbb{Z}^n_{\geq 0})$ kümeleri $n > 1$ için Cantor kümesine homeomorfiktir. Her $w \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ polinomu, m_i'ler monomial olmak üzere $\sum_1^d c_i m_i$ olarak ayrıştırılır. $i \neq j$ için $m_i \neq m_j$'dir ve sıfırdan farklı c_i'ler $\mathbb{K}$ cisminde skalerdir. $<$, monomialler arasında bir sol sıralama ise $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ üzerindeki bir sıralamadır. $(i_1, \dots, i_n) < (j_1, \dots, j_n) \Leftrightarrow \left(x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}\right) < (x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n})$ olur. m_i'ler farklı monomialler olmak üzere ($i \neq j$ iken $m_i \neq m_j$) $w = \sum_1^d c_i m_i$ için $LM(w) = max\{m_i | i = 1,2, \dots, d\}$ olur. Yani $LM(w) = m_i$ ise her $j \neq i$ için $m_i > m_j$ olur.

Böylece $c_i m_i$, w polinomunun en yüksek dereceli terimi olur. $I \lhd \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ideali için $LM(I) =< m|$Bir $w \in I$ için m, w''nın en yüksek dereceli monomiali$>$ olur. $LM(I) \lhd \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ olduğunu gösterelim.

i) $f_1, f_2 \in LM(I)$ için $f_1 - f_2 \in LM(I)$ olduğunu gösterelim. $f_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i m_i$ olsun. O halde bir $g_i \in I$ vardır öyle ki m_i, g_i'nin en büyük monomialidir. $f_2 = \sum_{j=1}^{m} d_j n_j$ olsun. O halde bir $h_j \in I$ vardır öyle ki n_j, h_j'nin en büyük monomialidir. $f_1 = c_1 m_1 + \dots + c_n m_n$ ve $f_2 = d_1 n_1 + \dots + d_m n_m$ olarak yazılabilir. $f_1 - f_2 = c_1 m_1 + \dots + c_n m_n - d_1 n_1 - \dots - d_m n_m$ olup $f_1 - f_2$'nin bir monomiali bir $k_i \in I$'nın en büyük monomiali olur. Böylece $f_1 - f_2 \in LM(I)$olur.

ii) Her $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ve her $g \in LM(I)$ için $fg, gf \in LM(I)$ olduğunu gösterelim. $g \in LM(I)$ olduğu için $g = \sum_{i=1}^{n} c_i m_i$ şeklindedir ve bir $h_i \in I$ vardır öyle ki m_i, h_i'nin en büyük monomialidir. $f = \sum_{j=1}^{m} d_j n_j$ şeklindedir. O halde $fg = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} d_j c_i n_j m_i$ olur. $I \lhd \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ olduğundan $h_i n_j \in I$ olur. Böylece $n_j m_i$, $h_i n_j$'nin en büyük monomiali olup $fg \in LM(I)$ olur. Benzer şekilde $gf \in LM(I)$ olduğu gösterilir.

$I \lhd \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ için eğer $LM(I) =< LM(f_1), \dots, LM(f_d) >$ olacak şekilde $\{f_1, \dots, f_d\} \subset I$ varsa $\{f_1, \dots, f_d\}$ kümesine I'nın bir Grobner bazı denir.

Monomialler üzerindeki farklı sıralamalar farklı Grobner bazı verirler. Bunu bir örnekle görelim.

Örnek 2: $I =< x_1^2, x_1x_3 - x_2^2 >$ olsun. $<$ sıralaması, Lex. ve ya Deglex. ise bu sıralamaya göre I'nın Grobner bazı $\{x_1^2, x_1x_2^2, x_1x_3 - x_2^2x_2^4\}$ olur. $<$ sıralaması, Degrevlex. ise bu sıralamaya göre I'nın Grobner bazı $\{x_1^2, x_2^2 - x_1x_3\}$ olur.

Tanım 3: $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ polinom halkasındaki $<$ sıralamasına sahip (f, g) monomial çifti için, LCM en küçük ortak katı göstermek üzere $<$ sıralamasındaki (f, g) monomial çiftinin $S - polinomu\ S(f, g)$ aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$S(f, g) = \frac{LCM(LM(f), LM(g))}{LT(f)} f - \frac{LCM(LM(f), LM(g))}{LT(g)} g$$

Örnek 4: $(f, g) = (x_1^2, x_1x_2 - x_2^2)$ ve $<$ sıralaması Lex. olsun.

$LM(f) = x_1^2$, $LM(g) = x_1x_2$ olup $LCM\big(LM(f), LM(g)\big) = x_1^2x_2$ olur. Sonuç olarak $S(f, g) = x_2x_1^2 - x_1(x_1x_2 - x_2^2) = x_1x_2$ olur.

Teorem 5: $\{f_1, \dots, f_k\}$, $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ polinom halkasındaki monomiallerin sonlu bir kümesi ve $S(f_i, f_j)$, S-polinomları olsun. $\{f_1, \dots, f_k\}$, $< f_1, \dots, f_k >$ idealinin bir Grobner bazıdır ancak ve ancak her i, j için $S(f_i, f_j)$ S-polinomlarının $(f_1, \dots, f_k)$'ya tam bölünebilmesidir.

Önerme 6: $I \lhd \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ ve $f_1, \ldots, f_s \in I$ olsun. $A = \{\leq \in LWO(\mathbb{Z}^n_{\geq 0}) | \; \{f_1, \ldots, f_s\}, \leq$ sıralamasına göre I'nın bir Grobner bazı$\}$ olmak üzere A kümesi, $LWO(\mathbb{Z}^n_{\geq 0})$'ın bir açık alt kümesidir.

İspat: $< \in LWO(\mathbb{Z}^n_{\geq 0})$ alalım. $<$ sıralamasına göre $S(f_i, f_j)$, $(f_1, \ldots, f_s)$'ye tam bölünür. $(f_1, \ldots, f_s)$'deki tüm monomialler $(m_1, \ldots, m_k)$ olsun. Genelliği bozmaksızın bu sıralamaya göre $m_1 > \cdots > m_k$ olsun. $< \in U = U_{m_2,m_1} \cap U_{m_3,m_2} \cap \ldots \cap U_{m_k,m_{k-1}} \subset A$ olup A, $LWO(\mathbb{Z}^n_{\geq 0})$'ın bir açık alt kümesidir.

Teorem 7: Her $I \lhd \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ ideali için her monomial sıralamasıyla I'nın bir Grobner bazı olan bir sonlu $\{f_1, \ldots, f_s\} \subset I$ kümesi vardır.

Böyle bir kümeye I'nın bir evrensel Grobner bazı denir.

İspat: Her $\{f_1, \ldots, f_s\} \in I$ için $\{f_1, \ldots, f_s\}$ kümesini I'nın Grobner bazı yapan sıralamların kümesi $V_{\{f_1,\ldots,f_s\}}$ olsun. Yani $V_{\{f_1,\ldots,f_s\}} = \{\leq \in LWO(\mathbb{Z}^n_{\geq 0}) | \leq$ sıralamasına göre $\{f_1, \ldots, f_s\}$, I'nın bir Grobner bazıdır$\}$ olur. $V_{\{f_1,\ldots,f_s\}}$ kümesi boş küme olabilir. Ayrıca Önerme 6'ya göre $V_{\{f_1,\ldots,f_s\}}$ kümesi açıktır. $V_{\{f_1,\ldots,f_s\}}$, her monomial sıralamasına göre I'nın bir Grobner bazıdır. Şimdi $\leq \in LWO(\mathbb{Z}^n_{\geq 0})$ alalım. $LWO(\mathbb{Z}^n_{\geq 0}) = \cup_{\{f_1,\ldots,f_s\} \subset I} V_{\{f_1,\ldots,f_s\}}$olur. $LWO(\mathbb{Z}^n_{\geq 0})$ kompakt olduğundan sonlu bir $V_{\{f_1,\ldots,f_{s_1}\}}$, $V_{\{g_1,\ldots,g_{s_2}\}}, \ldots, V_{\{h_1,\ldots,h_{s_t}\}}$ örtüsü var olup $\{f_1, \ldots, f_{s_1}, g_1, \ldots, g_{s_2}, \ldots, h_1, \ldots, h_{s_t}\}$ kümesi I'nın evrensel Grobner bazıdır.

Kaynaklar

ADAM S. SİKORA, Topology on the spaces of ordering groups, Bull. London Math. Soc. (2004)

W. ADAMS and P. LOUSTAUNAU, An introduction to Grobner bases, Grad. Stud. Math. 3 (Amer. Soc., Providence, RI, 1994)

SCHWARTZ, 'Stability of Grobner bases', J. Pure Appl. Algebra 53 (1998) 171-186

D. COX, J. LITTLE and D. O'SHEA, Ideals, varieties, and algorithms, an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra, 2nd edn (Springer, New York, 1997)

L. FUCHS, Partially ordered algebraic systems (Permagon Press, Oxford, 1963)