

GRUP HALKALARI VE ÖNEMİ*

*Group Rings and The Importance of the Subject**

Melek ŞENOL
Matematik Anabilim Dalı

Naime EKİCİ
Matematik Anabilim Dalı

ÖZET

Bu çalışmada, grup halkası konusu ele alınmıştır. G bir grup ve rasyonel tamsayıların J halkası ile ilişkilendirilmiş grup halkası JG olsun. Grup halkasında ve JX serbest grup halkasında türev tanımı verilerek Fox türevinin uygulamasında kullanılan bir teorem ve bu teoremin uygulaması amacı ile birkaç örnek verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Grup, Halka, Cisim, Grup Halkası, Fox Türevleri

ABSTRACT

In this study, we deal with the concept of group ring. Let G is a group and its group ring JG with the concept of group ring. We define derivation in the group ring and in the free group ring JX and we establish a theorem which we use applications of Fox's derivation and we have some examples with applications of this theorem.

Key Words: Group, Ring, Field, Group Ring, Fox's Derivation

Giriş

K bir cisim ve G sonlu olması gerekmeyen çarpımsal bir grup olsun. $K[G]$ grup halkası $\alpha \in G$, $a_\alpha \in K$ olmak üzere sonlu sayıda a_α katsayıları sıfırdan farklı olacak şekilde $\sum a_\alpha \cdot \alpha$ şeklindeki elemanların kümesinden oluşur. $K[G]$ grup halkasında toplama

$$\left(\sum a_\alpha \cdot \alpha\right) + \left(\sum b_\alpha \cdot \alpha\right) = \sum (a_\alpha + b_\alpha) \cdot \alpha$$

skalerle çarpma

$$b \left(\sum a_\alpha \cdot \alpha\right) = \sum (b \cdot a_\alpha) \cdot \alpha, \quad (b \in K)$$

ve çarpma

* Yüksek Lisans Tezi-MSc. Thesis

$$\left(\sum_{x \in G} a_x \cdot x\right) \left(\sum_{y \in G} b_y \cdot y\right) = \sum_{x,y \in G} (a_x \cdot b_y)(xy) = \sum_{z \in G} c_z \cdot z$$

şeklinde tanımlıdır. Burada

$$c_z = \sum_{xy=z} a_x b_y = \sum_{x \in G} a_x b_{x^{-1}z}$$

dir. $K[G]$ grup halkası G tabanlı K -vektör uzayıdır. $K[G]$ bir halkadır ve aslında bir K -cebirdir.

Bu kısımda herhangi bir G grubu ve rasyonel tam sayıların J halkası ile ilişkilendirilmiş JG grup halkasını çalışacağız. Çalışmamızda R. H. Fox'un Free Differential Calculus I. Derivation in the Free Group Ring ve W. Lin'in Application of Fox's Derivation in Determining the Generators of a Group isimli makalelerini inceleyerek örneklerle zenginleştirdik.

J nin a elemanı JG nin $a \cdot 1$ elemanı ile ve G nin g elemanı JG nin $1 \cdot g$ elemanı ile tanımlanabilir. Böylece J ve G, JG nin alt kümeleri olarak görülebilir.

Bir G grubundan bir H grubuna ψ homomorfizması JG den JH a bir halka homomorfizmasını belirler. Aynı ψ sembolü tarafından belirtilen bu halka homomorfizması, grup-homomorfizmasının lineer genişlemesidir. $\psi(\sum a_g g) = \sum a_g \psi(g)$ şeklinde tanımlıdır ve J nin her elemanını sabit bırakır. ψ grup-homomorfizmasının çekirdeği, ψ tarafından H nin birim elemanı 1 e dönüştürülen G nin elemanlarından oluşan normal alt grup N dir. ψ halka-homomorfizmasının çekirdeği, ψ tarafından JH in sıfır elemanına dönüştürülen JG nin elemanlarından oluşan \mathfrak{N} idealidir. Bu şekilde \mathfrak{N} ideali her normal N alt grubuna karşılık getirilebilir. Karşıt olarak JG de ki her \mathfrak{M} ideali G nin bir normal alt grubunu tanımlar. Bu alt grup, $JG \rightarrow JG / \mathfrak{M}$ halka homomorfizması tarafından G nin 1 e dönüştürülen elemanlarından oluşur. Açık bir şekilde verilen bir N normal alt grubuna karşılık gelen \mathfrak{N} ideali N yi belirler ve N yi belirleyen JG nin en küçük idealidir. Eğer $n_1, n_2, \dots \in G$ de N yi üretiyor ise o zaman $n_1 - 1, n_2 - 1 \dots \in JG$ de N yi üretir.

$\circ: G \rightarrow 1$ aşık homomorfizması tarafından belirlenen $\circ: JG \rightarrow J$ homomorfizmasının özel bir önemi vardır. JG nin $\sum a_g g$ elemanı, \circ tarafından katsayıların toplamına $\circ(\sum a_g g) = \sum a_g \circ(g) = \sum a_g$ dönüştürülür. \circ halka-homomorfizmasının çekirdeği yani G nin kendisine karşılık gelen \mathfrak{O} ideali, katsayıların toplamı sıfır olan bütün elemanlardan oluşur. \mathfrak{O} ye JG nin temel ideali denir.

JG grup halkasında ki türev JG den JG ye bir D dönüşümü ile gösterilir ve aşağıdakileri sağlar.

$$D(u + v) = Du + Dv \quad (1.1.)$$

$$D(u \cdot v) = Du \cdot \circ (v) + u \cdot Dv, \quad u, v \in JG. \quad (1.2.)$$

$$D(gh) = Dg + gDh, \quad g, h \in G. \quad (1.2'.)$$

$$Da = 0, \quad a \in J. \quad (1.3.)$$

$$D(\sum a_g g) = \sum a_g Dg, \quad (1.4.)$$

$$D(u_1 \cdot u_2 \cdots u_l) = \sum_{i=1}^l u_1 \cdots u_{i-1} D u_i \cdot \circ (u_{i+1}) \cdots \circ (u_l), \quad (1.5.)$$

$$D(g^{-1}) = -g^{-1} Dg, \quad g \in G. \quad (1.6.)$$

JG de ki türev bir sağ JG -modül belirler ve bu modülde toplama $(D_1 + D_2)u = D_1u + D_2u$ ve sağ-çarpım, JG nin bir v elemanı için $(D \cdot v)u = Du \cdot v$ şeklinde tanımlıdır.

Bir X serbest grubu, $(x) = (x_1, x_2, \dots)$ üreteçler kümesine sahiptir. X in bir elemanı, kelimelerin bir u denklik sınıfıdır öyle ki bir tek gösterime sahip olan indirgenmiş kelime $\varepsilon_k = \pm 1, j_k = j_{k+1}$ için $\varepsilon_k + \varepsilon_{k+1} \neq 0$ olmak üzere $\prod_{k=1}^l x_{j_k}^{\varepsilon_k}$ ile gösterilir. u nun uzunluğu indirgenmiş temsilci kelimenin l uzunluğudur. Birim eleman 1, boş kelime ile temsil edilir ve uzunluğu sıfırdır. u nun u^{-1} tersi $\prod_{k=l}^1 x_{j_k}^{-\varepsilon_k}$ indirgenmiş kelimesi ile temsil edilir.

JX serbest grup halkasının bir elemanı $f(x) = \sum a_u u, u \in X, a_u \in J$ serbest polinomudur. X den bir G grubuna ϕ homomorfizması $(x) \rightarrow (\phi(x)) = (\phi(x_1), \phi(x_2) \cdots)$ şeklinde tanımlı bir dönüşümdür. Bu homomorfizmanın belirlediği halka homomorfizması $\phi: JX \rightarrow JG, f(x) \rightarrow f(\phi(x)) = \sum a_u \phi(u)$ şeklinde tanımlı bir dönüşümdür. Özel olarak $\circ: JX \rightarrow J$ homomorfizması $f(x) \rightarrow f(1) = \sum a_u \circ (x) = \sum a_u$ şeklinde tanımlıdır. JX in \mathfrak{K} temel ideali $f(1) = 0$ olan $f(x)$ polinomlarından oluşur. JX de ki türevlerin kümesi özel basit bir yapıya sahiptir.

Teorem 1: X in her bir x_j üreteğine $f(x) \rightarrow D_j f(x) = f_{x_j}(x) = \partial f(x) / \partial x_j$ türevi karşılık gelir ve buna x_j ye göre türev denir. Bu türev

$$\frac{\partial x_k}{\partial x_j} = \delta_{j,k} \quad (\text{Kroneker delta}) \quad (1.7.)$$

özelliğine sahiptir. Dahası $f(x) \rightarrow f'(x)$ şeklinde tanımlı bir ve yalnız bir türev vardır öyle ki x_1, x_2, \dots yi JX in önceden belirlenmiş $h_1(x), h_2(x), \dots$ elemanlarına dönüştürür. Bu türevin formülü

$$f'(x) = \sum \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot h_j(x). \quad (1.8.)$$

İspat. Her j indeksi ve X in u elemanı için

$$\langle j, u \rangle = \begin{cases} 1, \text{eğer } x_j, \text{ indirgenmiş temsilci kelime } u \text{ nun başlangıç kısmı ise} \\ 0, \text{ aksi takdirde} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu tanımın lineer olarak JX e genişletilmesi $\langle j, f(x) \rangle = \langle j, \sum a_u u \rangle = \sum a_u \langle j, u \rangle$ şeklindedir.

Her j indeksi, X in w elemanı ve $f(x)$ serbest polinomu için

$$\langle j, w, f(x) \rangle = \langle j, w^{-1} f(x) \rangle - \langle j, w^{-1} \rangle f(1)$$

şeklinde tanımlansın. $\langle j, w, u \rangle = \langle j, w^{-1} u \rangle - \langle j, w^{-1} \rangle$ ifadesi w, u nun bir başlangıç kısmı değilse sıfırdır. Çünkü x_j nin $w^{-1} u$ nun başlangıç kısmı olması için gerek ve yeter koşul x_j nin w^{-1} in bir başlangıç kısmı olmasıdır. j ve $f(x)$ verilsin $\langle j, w, f(x) \rangle = \langle j, w, \sum a_u u \rangle = \sum a_u \langle j, w, u \rangle$ tamsayısı X in w elemanlarının bir sonlu sayısı hariç sıfıra eşittir. x_j ye göre $f(x)$ in türevini

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = \sum_{w \in X} \langle j, w, f(x) \rangle w$$

şeklinde tanımlayalım. Açık bir şekilde $f(x)$ türevi (1.1) i sağlar. Böylece (1.2) nin (1.2') özel durumunu ispatlamak uygundur. $u, v \in X$ olsun.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(uv)}{\partial x_j} &= \sum_w (\langle j, w^{-1} uv \rangle - \langle j, w^{-1} \rangle) w \\ &= \sum_w (\langle j, w^{-1} u \rangle - \langle j, w^{-1} \rangle) w + \sum_w (\langle j, w^{-1} uv \rangle - \langle j, w^{-1} u \rangle) w \\ &= \sum_w (\langle j, w^{-1} u \rangle - \langle j, w^{-1} \rangle) w + u \sum_t (\langle j, t^{-1} v \rangle - \langle j, t^{-1} \rangle) t \\ &= \frac{\partial u}{\partial x_j} + u \frac{\partial v}{\partial x_j} \end{aligned}$$

(1.7) in ispatı için x_k nin başlangıç kısımlarını 1 ve x_k olarak görelim. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_k}{\partial x_j} &= \langle j, 1, x_k \rangle + \langle j, x_k, x_k \rangle x_k \\ &= (\langle j, x_k \rangle - \langle j, 1 \rangle) + (\langle j, 1 \rangle - \langle j, x_k^{-1} \rangle) x_k \end{aligned}$$

$$= (\delta_{jk} - 0) + (0 - 0)x_k.$$

Son olarak (1.8) i ispatlayalım. $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$, j indislerinin sonlu sayısı hariç tanımlı olmadığından $\sum_j \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot h_j(x)$ toplamı sonludur. JX de ki türevler bir sağ JX -modül formunda olduğu için $f(x) \rightarrow \sum_j \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot h_j(x)$ bir türevdir. Dahası her k indeksi için $x_k \rightarrow h_k(x)$ dir. Eğer $f(x) \rightarrow f'(x)$, x_1, x_2, \dots yi $h_1(x), h_2(x), \dots$ e götüren herhangi bir türev dönüşümü ise o zaman $f(x) \rightarrow f'(x) - \sum_j \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot h_j(x)$, her x_j yi 0 a götüren bir türev dönüşümüdür. Böylece her $x_j^{-1}, -x_j^{-1} \cdot 0 = 0$ a gider. (1.1) ve (1.2) den JX in her elemanı 0 a dönüşür. Böylece $f'(x) = \sum_j \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot h_j(x)$ dir.

$f(x) \rightarrow f(x) - f(1)$, x_1, x_2, \dots yi $x_1 - 1, x_2 - 1, \dots$ e götüren bir türev dönüşümüdür. (1.8) den

$$f(x) = f(1) + \sum_j \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \cdot (x_j - 1) \quad (1.9.)$$

temel formülü elde edilir. Bu formül JX in herhangi bir $f(x)$ elemanını $f(1)$ den ve $D_j f(x)$, $j = 1, 2, \dots$, türevi özel olarak X serbest grubunun herhangi bir u elemanını $\partial u / \partial x_1, \partial u / \partial x_2, \dots$ türevlerinden kurtarır.

Bir üretcin bir kuvvetinin türevi (1.9) temel formülünden kolaylıkla hesaplanır

$$\begin{aligned} D_j x_j^p &= \frac{(x_j^p - 1)}{(x_j - 1)} = 1 + x_j + \dots + x_j^{p-1} & p \geq 1, \quad (1.10.) \\ &= 0 & p = 0, \\ &= -x_j^p - x_j^{p+1} - \dots - x_j^{-1} & p \leq -1. \end{aligned}$$

Bu formül ve (1.5) den $u \in X$ elemanı

$$u = u_0 x_j^{p_1} u_1 x_j^{p_2} \dots u_{q-1} x_j^{p_q} u_q$$

formunda yazılabilir. Burada p_1, p_2, \dots, p_q sıfırdan farklı tamsayılardır ve indirgenmiş temsilci kelimeler u_0, u_1, \dots, u_q x_j üretcini içermez.

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^q u_0 x_j^{p_1} \dots u_{i-1} \frac{x_j^{p_i-1}}{x_j-1} \quad (1.11.)$$

ifadesi elde edilir.

Örnek 1: X serbest grubunun üreteç kümesi $(x) = (x_1, x_2)$ ve $u = x_2^2 x_1^4 x_2 x_1 x_2^4 x_1^3 x_2^5$ olsun.

$$\begin{aligned} D_1(u) &= D_1(u_0 x_1^4 u_1 x_1 u_2 x_1^3 u_3) = \sum_{i=1}^3 u_0 x_1^{p_1} \cdots u_{i-1} \frac{x_1^{p_i-1}}{x_1-1} \\ &= u_0 \frac{x_1^4-1}{x_1-1} + u_0 x_1^4 u_1 \frac{x_1-1}{x_1-1} + u_0 x_1^4 u_1 x_1 u_2 \frac{x_1^3-1}{x_1-1} \\ &= u_0(1 + x_1 + x_1^2 + x_1^3) + u_0 x_1^4 u_1 + u_0 x_1^4 u_1 x_1 u_2 (1 + x_1 + x_1^2) \\ &= x_2^2(1 + x_1 + x_1^2 + x_1^3) + x_2^2 x_1^4 x_2 + x_2^2 x_1^4 x_2 x_1 x_2^4 (1 + x_1 + x_1^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_2(u) &= D_2(x_2^2 x_1^4 x_2 x_1 x_2^4 x_1^3 x_2^5) = \sum_{i=1}^4 u_0 x_2^{p_1} \cdots u_{i-1} \frac{x_2^{p_i-1}}{x_2-1} \\ &= \frac{x_2^2-1}{x_2-1} + x_2^2 u_1 \frac{x_2-1}{x_2-1} + x_2^2 u_1 x_2 u_2 \frac{x_2^4-1}{x_2-1} + x_2^2 u_1 x_2 u_2 x_2^4 u_3 \frac{x_2^5-1}{x_2-1} \\ &= 1 + x_2 + x_2^2 x_1^4 + x_2^2 x_1^4 x_2 x_1 (1 + x_2 + x_2^2 + x_2^3) + x_2^2 x_1^4 x_2 x_1 x_2^4 x_1^3 (1 + x_2 + x_2^2 + x_2^3) \end{aligned}$$

Örnek 2: $m, n > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} D_1(x_1^m x_2^n x_1^{-m} x_2^{-n}) &= (1 + x_1 + \cdots + x_1^{m-1}) + x_1^m x_2^n (-x_1^{-m} - x_1^{-m+1} - \cdots - x_1^{-1}) \\ &= (1 - x_1^m x_2^n x_1^{-m})(1 + x_1 + \cdots + x_1^{m-1}). \end{aligned}$$

F serbest grubunun bazı x_1, x_2, \dots, x_n olsun. $j = 1, 2, \dots, n$ için $x_j \in ZF$ olmak üzere $\frac{\partial}{\partial x_j}$, x_j ye göre kısmi Fox türevi olsun öyle ki $\partial x_i / \partial x_j = \delta_{ij}$ dir (δ_{ij} Kroneker delta). y_1, y_2, \dots, y_n F nin elemanlarının bir kümesi olsun ve $\left\| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right\| = \left\| \frac{\partial (y_1, y_2, \dots, y_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \right\|$ ifadesi Jacobian matrisi belirtsin. 1973 de Birman " y_1, y_2, \dots, y_n F yi üretir ancak ve ancak $\left\| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right\|$ Jacobian matrisinin sağ tersi vardır" teoremini ispatladı. $N \triangleleft F$ olmak üzere $\overline{y_1}, \overline{y_2}, \dots, \overline{y_n}$ elemanlarının kümesinin $G = F/N$ nin üreteç kümesi olması için gerek ve yeter koşulları belirleyelim.

Teorem 2: F, x_1, x_2, \dots, x_n bazına sahip bir serbest grup ve N, F nin normal alt grubu ve y_1, y_2, \dots, y_n F nin elemanlarının bir kümesi olsun. O zaman $\{\overline{y_1}, \overline{y_2}, \dots, \overline{y_n}\}$ kümesinin F/N nin üreteç kümesi olması için gerek ve yeter koşul ZF üzerinde $n \times n$ tipinde bir $A = (a_{ij})$ matrisi vardır öyle ki $g_1, g_2, \dots, g_n \in \mathbb{Z}F$ ve $h_1, h_2, \dots, h_n \in N$ olmak üzere

$$(a_{ij}) \left\| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right\| + \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_n) \left\| \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right\| = E$$

olmasıdır. Burada $E, n \times n$ tipinde birim matris ve $\text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_n)$ esas köşegen elemanları g_1, g_2, \dots, g_n olan $n \times n$ tipinde köşegen matristir.

İspat. Eğer $\{\overline{y_1}, \overline{y_2}, \dots, \overline{y_n}\}, F/N$ nin üreteç kümesi ise $\overline{x_i} = X_i(\overline{y_1}, \overline{y_2}, \dots, \overline{y_n})$ $\overline{y_1}, \overline{y_2}, \dots, \overline{y_n}$ de bir kelimedir. Böylece $x_i = W_i(y_1, y_2, \dots, y_n)h_i, h_i \in N$ dir. ZF de

$$\delta_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \{W_i(y_1, y_2, \dots, y_n)h_i\} = \frac{\partial W_i}{\partial x_j} + W_i \frac{\partial h_i}{\partial x_j}$$

elde edilir. (1.2') özellikten

$$\frac{\partial W_i}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \frac{\partial y_k}{\partial x_j}, a_{ik} \in \mathbb{Z}F, 1 \leq k \leq n$$

dir. $A = (a_{ij})$ ve $g_i = W_i, i = 1, 2, \dots, n$ olsun. O zaman

$$(a_{ij}) \left\| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right\| + \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_n) \left\| \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right\| = E$$

eşitliği elde edilir.
Tersine

$$(a_{ij}) \left\| \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right\| + \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_n) \left\| \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right\| = E \text{ olsun.}$$

Burada $g_1, g_2, \dots, g_n \in \mathbb{Z}F$ ve $h_1, h_2, \dots, h_n \in N$ dir. O zaman

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} + g_i \frac{\partial h_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$$

olur. Eşitliğin her iki tarafını $x_j - 1$ ile çarpalım ve j üzerinde toplam alalım.

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} (x_j - 1) + \sum_{j=1}^n g_i \frac{\partial h_i}{\partial x_j} (x_j - 1) = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} (x_j - 1)$$

dır. Fox' un temel formülü (1.9) dan $\sum_{j=1}^n \frac{\partial y_k}{\partial x_j} (x_j - 1) = y_k - 1$ ve $\sum_{j=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial x_j} (x_j - 1) = h_i - 1$ elde edilir. Böylece

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} (y_k - 1) + g_i (h_i - 1) = x_i - 1 \quad \text{ve}$$

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} (y_k - 1) = x_i - 1 \pmod{\mathbb{Z}F(N-1)}$$

elde edilir. (Cohen, 1972) den $\overline{y_1}, \overline{y_2}, \dots, \overline{y_n}$ F/N nin üreteç kümesidir.

Örnek 3: $F = \langle x_1, x_2 \rangle$, $N = F'$, $y_1 = x_1^{-1}$, $y_2 = x_2$ olsun. $\overline{y_1} = \overline{x_1^{-1}} = x_1^{-1}F'$ ve $\overline{y_2} = \overline{x_2} = x_2F'$ olmak üzere $\overline{y_1}, \overline{y_2}$ F/F' için üreteç kümesi midir?

Çözüm. $\overline{y_1}, \overline{y_2}$ nin F/F' nin üreteç kümesi olması için

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \end{vmatrix} + \text{diag}(g_1, g_2, \dots, g_n) \begin{vmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} \end{vmatrix} = E$ olacak şekilde A matrisi, $g_1, g_2 \in \mathbb{Z}F$ ve $h_1, h_2 \in N$ elemanları bulunmalıdır.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -a_{11}x_1^{-1} & a_{12} \\ -a_{21}x_1^{-1} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & g_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \\ g_2 \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & g_2 \frac{\partial h_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-a_{11}x_1^{-1} + g_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_1} = 1$$

$$a_{12} + g_1 \frac{\partial h_1}{\partial x_2} = 0$$

$$-a_{21}x_1^{-1} + g_2 \frac{\partial h_2}{\partial x_1} = 0$$

$$a_{22} + g_2 \frac{\partial h_2}{\partial x_2} = 1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 - x_2^{-1} - x_1 & x_2^{-1} - x_2^{-1}x_1^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; h_1 = [x_1^{-1}, x_2] = x_1x_2^{-1}x_1^{-1}x_2, h_2 = 1; g_1 = x_1^{-1},$$

$g_2 = 1$ olarak alınırsa istenen elde edilir.

Kaynaklar

- BIRMAN, J.S., 1973. An Inverse Function Theorem for Free Groups. Proc. Amer. Math. Soc., 41: 634-638
- COHEN, D. E., 1972. Groups of Cohomological Dimension One. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York
- FOX, R. H., 1953. Free Differential Calculus I. Derivation in the Free Group Ring. Ann. of Math., 57: 547-560
- LIN, W., 2000. Application of Fox's Derivation in Determining the Generators of a Group. Bull. Austral. Math. Soc., 61: 27-32