Ç.Ü Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi Yıl:2011 Cilt:26-1

REGULER VE STRONGLY REGULER YAKIN HALKALARDA ASAL VE MAKSİMAL İDEALLER[1]

*Prime And Maximal Ideal İn Reguler And Strongly Reguler Near-Rings**

Selahattin KILINÇ
Matematik Anabilim Dalı

Ahmet TEMİZYÜREK
Matematik Anabilim Dalı

ÖZET

Biz bu çalışmada yakın-halkalar teorisinde bazı yakın-halka sınıfları için, asal ve maksimal idealleri inceledik. Reguler, güçlü reguler (strongly reguler) yakın-halkaların her asal idealinin maksimal ideal olduğu gösterilmiştir.
Anahtar Kelimeler: Yakın-hakalar, Reguler yakın-halkalar, Asal ideal, Maksimal İdeal

ABSTRACT

In this study, we have investigated the prime and maximal ideals of some specia lclasses of near-rings. Especially we have shown that every prime ideals of regular and strongly reguler are maximal.
Key Words: Near-rings, Regulernear-rings, Prime ideal , Maximal ideal

Giriş

Halkaların genelleştirilmiş bir hali olan yakın-halkaların , halkalardan farklı olarak , bir halkada birinci işlem değişmeli iken yakın-halkalarda birinci işlem değişmeli olmak zorunda değildir. Ayrıca halkada ikinci işlemin birinci işlem üzerine dağılma özelliği mevcut iken yakın-halkalarda ikinci işlemin birinci işlem üzerine tek yönlü dağılma özelliğine sahip olması yeterlidir.

Bu çalışmada yakın-halkalarda asal ideallerin maksimalliği incelenmiştir. Halkalar teorisindeki bazı sonuçları yakın halkalara uyarlamak mümkündür. Halkalar teorisinde her asal idealin maksimal olmadığı fakat bazı özel halkalarda bu iddanın doğru olduğu bilinen bir gerçektir. Yakın- halkalarda da benzer bir durum söz konusudur. (Birkenmeier, 1999) sıfır simetrik yakın-halkalarda $N^2 = N$ ise her asal idealin maksimal olduğunu yakın halkalar için de göstermiştir. Acaba ne zaman bir asal ideal maksimal olur sorusu yakın-halka çalışanlarını meşgul etmiştir.

Yakın-halkaların asal idealleri üzerini ilk çalışmalar ,(Van der Walt, 1964), (Laxton,1964), (Beidleman,1967) ve (Rao ,1979) tarafından yapılmıştır. (Murty, 1984) asal ve tamamen asal idealler , (Mason , 1984) isse reguler ve strongly reguler yakın–halkalar da asal ve maksimal idealleri incelemiştir. Bu çalışmalardan bir değerlendirme yapılarak her asal idealin maksimal olduğu bazı yakın-halka sınıfları için incelenmiştir.

---

* Yüksek Lisans Tezi-MSc. Thesis

Materyal ve Metot

Yakın-halkalar halkaların genellemesidir. Kabaca ifade edecek olursak bir $(N,+,.)$ halkasında $+$ işlemine göre değişmeli olmak zorunda olmayan ve sadece bir taraftan sağdan veya soldan dağılma kuralı varsa $(N,+,.)$halkası bir yakın-halkadır.

Tanım 1. Bir N kümesi "+" ve "." şeklinde gösterilen iki ikili işlem ile aşağıdaki şartları sağlıyorsa $(N,+,\ .)$ üçlüsüne bir yakın-halka denir.

1. $(N,+)$ değişmeli olması gerekmeyen bir grup
2. $(N,.)$ bir yarı grup
3. $\forall x,y,z \in N$ için $(x+y)z = xz + yz$

3. özellikte sağdan dağılma özelliği kullanıldığından bu şartları sağlayan $(N,+,\ .)$ üçlüsüne sağ yakın-halka denir. Eğer 3. özellik

$$\forall\, x,y,z \in N \text{ için } x(y+z) = xy + xz$$

alınırsa, bu şartları sağlayan $(N,+,\ .)$ üçlüsüne sol yakın-halka denir. Yani dağılma özelliğinin yönüne göre yakın-halkanın sağ ya da sol olması belirlenir.

Bu çalışma boyunca aksi belirtilmedikçe tüm halkalar sağ yakın-halka olarak alınacaktır.

Önerme 2. N yakın-halkası için aşağıdaki özellikler sağlanır.

a) $\forall\, n, n' \in N :\ \ 0.n = 0$

b) $\forall\, n, n' \in N :\ (-n).n = -n.n'$ dir.

Tanım 3. N bir yakın-halka olsun.

a) N_0={ $n \in N : n.0 = 0$ } N nin sıfır-simetrik parçası olarak adlandırılır.

b) N_c={ $n \in N: n.0 = n$ } = { $n \in N :\ \forall\, n' \in N : n.n' = n$ } N nin sabit parçası olarak adlandırılır.

N_0 ve N_c birer yakın-halkadır.

$N = N_0$ ise N yakın-halkasına 0-simetrik ve $N = N_c$ ise N yakın-halkasına sabit yakın halka denir.

Tanım 4. $(N,+,.)$ bir yakın-halka olsun.

a) Eğer $d \in N$ ve $\forall\, n, n' \in N$ için

$$d(n+n') = dn + dn'$$

ise $d \in N$ dağılmalı eleman denir. N yakın-halkasının tüm dağılmalı elemanlarının kümesi N_d ile gösterilir.

Bu çalışmada kullanacağımız yakın-halka sınıfları aşağıdaki gibidir.

$\mathfrak{N}$ ile yakın-halkaların sınıfını,

$\mathfrak{N}_0$ ile sıfır simetrik yakın-halkaların sınıfını,

$\mathfrak{N}_1$ ile birimli yakın-halkaların sınıfını göstereceğiz.

Tanım 5. N bir yakın halka ve I , N nin bir normal alt grubu olsun. Bu durumda eğer;

a) $I.N \subseteq I$

b) $\forall\, x,y \in N$ ve $\forall\, i \in I$ için

$$x.(y+i) - xy \in I$$

Şartları sağlanıyor ise I ya N yakın-halkasının ideali denir ve $I \lhd N$ ile gösterilir.

Eğer sadece a) koşulu sağlanıyor ise I ya N yakın-halkasının sağ ideali denir, b) koşulu sağlanıyor ise I ya N yakın-halkasının sol ideali denir ve sırası ile $I \lhd_r N$ ve $I \lhd_l N$ ile gösterilir.

Tanım 6. $\exists\, k \in \mathbb{N}$ için $n^k=0$ ise $n \in N$ ye nilpotent eleman denir. ($\mathbb{N}$ ile doğal sayılar kümesini gösterir)

$\forall\, k \in \mathbb{N}$ için $n^k=n$ eşitliğini sağlayan $n \in N$ var ise n ye idempotent eleman denir.

Tanım 7. C(N)=$\{n \in N :\ \forall\, n' \in N$ için $n.n' = n'n\ \}$ ise (N, .) nın (center) merkezleyeni denir.

Tanım 8. N bir yakın-halka olsu. $\forall\, a, b, n \in N$ olmak üzere $ab = 0$ için $anb = 0$ özelliği sağlanıyor ise N ye (insertion-of-foctors-property) IFP özelliğine sahiptir denir. IFP özelliğine sahip yakın-halkalar için aşağıdaki önemli önermeyi verelim.

Önerme 9. (Bell, 1970), (Heatherly, 1973), (Marin, 1971) , (Ramakotaiahrao, 1979), $N \in \mathfrak{N}_0$ yakın-halkası nilpotent elemana sahip olmadan bir IFP yakın-halkasıdır.

İspat: $xy \in N$ için $xy = 0$ ise $yxyx = y0x = 0$ dır. Buradan $(yx)^2 = 0$ olup bu yüzden $yx = 0$ dır. Şimdi;

$$\forall\, n \in N : xny = (ny)x = n(yx) = n0 = 0$$

Bundan dolayı N , IFP özelliğine sahiptir.

Tanım 10. N bir yakın-halka ve $\forall x \in N$ için $x = xax = ax^2$ olacak şekilde bir $a \in N$ varsa N varsa N ye sol reguler yakın-halka denir.

Tanım 11. $\forall x \in N$ için $x = ax^2$ olacak şekilde bir $a \in N$ varsa N sol güçlü(strongly) reguler yakın-halka denir.

Sonuç 12.

a) Reguler yakın-halkalarda ki ax ve xa birer idempotentir.
b) N ,sıfır simetrik ve indirdenebilir bir yakın halka ise IFP özelliğini sağlar ve $x, y \in N$ için $x.y = 0$ ise $y.x = 0$ dır.
c) N nin sıfırdan başka nilpotent elemanı yoksa N indirgenebilirdir.
d) Birimli reguler yakın halkanın tüm idempotentleri merkezleyendir.

Tanım 13. N bir yakın-halka olsun. N nin tüm sıfırdan farklı ideallerinin kümesinde minimal olan ideale N nin minimal ideali denir.

Benzer olarak, minimal sağ ve sol ideal tanımları verilebilir. Bu tanımların dualleri maksimal ideal tanımlarıdır.

N bir yakın-halka ve $S, T \subseteq N$ olsun .Bu durumda;

$$S.T = \{\, st : s \in S \text{ ve } t \in T \,\}$$

olarak tanımlanır. n doğal sayısı için S^n tanımı benzer şekilde tanımlanabilir. N bir yakın-halka ve $S, T \lhd N$ olsun. Bu taktirde, ST çarpımı bir ideal olmayabilir. Hatta bu çarpım $(N, +)$ grubunun bir alt yarı grubu dahi olmak zorunda değildir.

Tanım 14. N bir yakın-halka ve $P \lhd N$ olsun. Eğer $\forall\, I, J \lhd N$ için $IJ \subseteq P$ olması, $I \subseteq P$ veya $J \subseteq P$ olmasını gerektiriyorsa P ye N yakın-halkasının bir asal ideali denir.

Tanım 15. $a.b \in P$ için $a \in P$ ya da $b \in P$ ise N nin P idealine tamamen (completely) asal ideal denir.

Lemma 16.

a) Eğer N sol yada sağ güçlü(strongly) regular yakın-halka ise N indirgenebilirdir.

b) Sıfır simetrik yakın-halkalarda $a.b = 0 \Longrightarrow b.a = 0$ olup IFP sağlanır.

İspat :

a) sağ güçlü(strongly) yakın-halka için ;

$$x = x^2.a \Rightarrow x = 0.a$$

olup

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

dır. O halde sağ güçlü(strongly) yakın-halka için N indirgenebilirdir.
Sol güçlü(strongly) yakın-halka için ;
Eğer $x^2 = 0$ ve

$$x = ax^2 = a.0$$

ise

$$0 = x^2 = (a.0)x = a(0x) = a.0 = x$$

olup. Bu sol güçlü(strongly) yakın-halka için de N nin indirgenebilir olduğunu gösterir.

b) Önerme 9. dan kolayca görülür.

Lemma 17. IFP ile bir sol reguler yakın-halka sağ reguler yakın-halkadır.
İspat : sol reguler yakın-halka tanımından ;

$$x = ax^2 = xax \Rightarrow (ax - xa)x = 0$$

IFP özelliğini göz önüne alırsak

$$(ax - xa)ax = 0$$

ya da

$$axax = xa^2x$$

buradan

$$ax = axax = xa^2x$$

bu yüzden

$$x = xax = x^2a^2x$$

olup burada $b = a^2x$ olarak seçilirse $x = x^2b$ olur ki bu da

$$xbx = xa^2x^2 = xax = x$$

böylece ispat biter.

Eğer N sol ve sağ strongly reguler yakın-halka ise $\forall\, x \neq 0\ \exists\, a, b : x = ax^2 = x^2b$ ise halka teoriden farklı olarak b nin a dan farklı seçilmesine gerek yoktur.Buna rağmen N nin sağ ve sol reguler olmasında b nin a ya eşit seçilmesin de iki durum söz konusudur; N sıfır simetrik ve birimli ya da N sıfır bölene sahip değildir. Gerçekten eğer N sıfır bölene sahip değil ve sol strongly reguler ise $x = ax^2$ den

$$(x - x^2a)x^2 = x^3 - x^2ax^2 = x^3 - x^3 = 0$$

olup buda $x^2 \neq 0$ ve $x = ax^2$ olmasını gerektirir.

Önerme 18. Eğer N sıfır simetrik ise sol regulerlik sol güçlü(strongly) regulerlikile çakışıktır. Buradan sağ regulerlikte elde edilir. Buradan başka eğer N uniter ise bu üç şart birbirine eşittir.
İspat : Eğer N sol güçlü(strongly) reguler yakın-halka ise her x için $x = ax^2$ olacak şekilde bir $a \in N$ vardır. Buradan hareketle

$$(x - xax)x = x^2 - xax^2 = x^2 - x^2 = 0$$

olup lemma 16 dan

$$x(x - xax) = 0$$

$$(x - xax)^2 = x(x - xax) - xax(x - xax) = 0$$

olup N indirgenebilirdir buradan da N sol regulerdir, Lemma 17 den de N sağ regulerdir. Dahası eğer N uniter (birimli) ve $x = x^2a = xax$ ise xa ve ax idempotentirler sonuç 12 den bunlar central olup bu yüzden $x = ax^2$ dir.
Sonuç 19. Nyakın-halkası IFP ile unital ise aşağıdakiler birbirine denktir.

a) Reguler
b) Sağ reguler
c) Sol reguler
d) Sol güçlü(strongly) reguler

İspat :
a⟹b :$x = xax$ den $(1 - xa)x = 0$ dır. IFP özelliğinden $ax = xa^2x$ olur o halde $x = xax = x^2(a^2x)$ önermeye dayanarak eğer N , IFP ile uniterl ise 1.0=0 dan 1x0=0 dır. Her x için $x0 = 0$ olup bu yüzden N sıfır simetriktir

Eğer tüm nilpotent elemanlar merkezleyen (central) ise N ye C.N özelliğine sahiptir denir. Eğer tüm idempotent elemanlar merkezleyen (central) ise N ye C.I özelliğine sahiptir denir. Eğer N , CI özelliği ile reguler ise sağ ve sol regulerdir. Bundan sonraki aşamada N yi sıfır simetrik yakın-halka olarak alacağız.
Lemma 20. N , CN özelliğine sahip olsun ;

a) $a.b = 0$ ise ba , axb ve bxa her x için merkezleğen (central) dır.
b) Eğer e bir idempotent ve $a.e = 0$ ise her x için $exa = 0$ dır.

İspat :

a) Eğer $a.b = 0$ ise $baba = 0$ dır Bu yüzden ba merkezleyen olup benzer şekilde her x için bxa da merkezleyendir.
b) Eğer $a.e = 0$ ise a) dan exa de merkezleyen. e ile hesaplanırsa $exa = axae = 0$ olur.

b) şıkkının bir genel sonucu aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.
Önerme 21. Eğer bütün e idempotentleri için ve her $x \in N$ için CN özelliğine sahip ise;

a) $ex - exe$ merkezleğendir.
b) Her dağılma özelliğine sahip idempotent merkezleyendir.

c) $x^2e = (xe)^2$
d) Eğer N uniter ise $xe = exe$ dir.

İspat :
a)

$$(ex - exe)e = 0$$

Lemma 16 dan her $r \in N$ için $er(ex - exe) = 0$ dır.

$$(ex - exe)^2 = ex(ex - exe) - exe(ex - exe) = 0$$

Olduğundan $ex - exe$ merkezleyendir.
b) Eğer e dağılma özelliğine sahip ise

$$e(ex - exe) = ex - exe$$

(eğer d dağılma özelliğine sahip ise $d(-n) = -dn$ dir)
ve a) yı kullanırsak $e(xe - exe)$ merkezleğendir. Şimdi e ile hesaplama yapılırsa ifadenin sıfıra eşit olduğu görülür ki buradan da $ex = exe$ dir.
c) Lemma 16 ile

$$(x - xe)e = 0$$

dan

$$e(x - xe) = 0$$

dır.

$$[(x - xe)xe]^2 = 0$$

olup bu da $(x - xe)xe$ nin merkezleğen olduğunu gösterir. Şimdi e ile hesaplama yapılırsa ifadenin sıfıra eşit olduğu görülür ki buradan da

$$x^2e = (xe)^2$$

dir.
d) N üniter olduğundan $e^2 = e$ olup buradan $(1 - e)e = 0$ dır. Lemma 16 dan $(1 - e)e = 0$ ise her x için $(1 - e)xe$ mekezleğendir.
Bu ifade e ile hesaplanırsa sıfıra eşit olduğu görülür.
Sonuç 22. Eğer N indirgenebilir ve uniter ise CI özelline sahiptir.
İspat : Önerme 21 nin a) şıkkının ispatından $ex - exe$ nin nilpotent olduğunu görebiliriz. Bu yüzden N indirgenebilir olup buradan da $ex = exe$ dir. Ayrıca önerme 21 nin d) şıkkından da $ex = exe$ olduğu görülebilir.
Lemma 23. Eğer N üniter(birimli) sol güçlü(strongly) reguler yakın-halka ise her asal ideal maksimal idealdir.
İspat : P bir asal ideal ve bir M maksimal ideali için $P \nsubseteq M$ olsun.

Şimdi $x \in M \backslash P$ alalım. Buradan

$$0 = x - ax^2 = (1 - ax)x$$

Olup bazı a elemanları için P tamamen asal ideal olduğundan $1 - ax \in P \subseteq M$ olup buradan da $x \in M$ olduğundan $1 \in P$ olur ki bu bir çelişkidir. Buda $P = M$ olmasını gerektirir ki P bir maksimal idealdir

KAYNAKLAR

ANSHEL, M., CLAY,J.R., 1968. Planarityin Agebraic Systems. Bull. Amer. Math. Soc, 74:746-748

BEIDLEMAN, J.C, 1967. Strictly Prime Distributively Generated Near-rings. Math 2 (100):97-105.

BEIDLEMAN, J.C, 1969. A Note on Reguler Near-rings. J. Indian Math.Soc, 33:207-210.

BELL, H.E., 1970. Near-rings in Which Each Element is a Power of İtself. Bull. Austral. Math. Soc., 2:363-368.

BİRKENMEİER,G.F.,GROENEWALD,N.J., 1999. Near-Rings in which each prime factor is simple, Mathematica Pannonica,10/2, 257-269.

CHAO, D.Z., 1975. Near-rings Without Non-zero Nilpotent Elements. Math. Japan, 21:449-454

DHEENA, P., 1989. A Generalization of Strongly Reguler Near-rings. Indian J. Pure. Appl. Math. 20(1):58-63.

DHEENA, P., SIVAKUMAR, D., 2004. On Strongly 0-Prime İdeals in Near-rings. Bull. Maaysian Math. Sc. Soc. 27:77-85.

DİCKSON, L.E., 1905. Definations of a Group and a Field by İndependent Postulates. Trans. Amer. Math. Soc. 6:198-204.

FAİN, C.G., 1968. Some Structure Theorems for Near-rings. University of Oklahoma. Doctoral Dissertation.

HEATHERLY, H.E., 1973. Near-rings Without Nilpotent elements. Publ. Math. Debrecen, 20:201-205.

LAXTON, R.R., 1964. Prime İdeals and The İdeal Radical of a Distributively Generated Near-rings. Math.Z. 83:8-17.

LIGH, S., 1970. On Reguler Near-rings. Math. Japon, 15:7-13

KANDASAMY, W.B.V., 2002. Smarandache Near-rings. American Researsh Press, Rehoboth, Usa. 200s

MARIN, V.G., 1971. Near Algebras Without Nilpotent Elements. Mat. Issled 6, Nr.,4(22):123-139.

MASON, G., 1980. A Generalition of Strongly Reguler Near-rings. Prog. Edinburgh Math. Soc. 23:27-35.

MAXSON, C.J.,1967. On Near-rings and Near-rings Modules. Suny at Buffalo, Doktoral Dissertation.

MURTI, C.V.L.N., 1984. On Strongly Reguler Near-rings. 293-300

PİLZ, G., 1983. Near-rigs. 2nd, Amsterdam, New York, Oxford, North-Holland. 470s.

RAMAKOTAİAH, D., RAO, G.K., 1979. On IFP Near-rings. J. Austral. Math. Soc. 27:365-370.

RAMAKOTAİAH, D., RAO, G.K, 1978. On Loop Near-rings. Bull. Aust. Math. Soc., 19:917-935

VAN DER WALT, A.P.J., 1964. Prime Ideals and Nil Radicals in Near-rings. Arch. Math. 15:408-414.

YAKABE, I., 1989. Reguler Near-rings without Non-zero Nilpotent Elements. Proc. Japan Acad. 65:176-179.