Ç.Ü Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi Yıl:2011 Cilt:26-1

*KOMPAKT GRUPLARIN PROJEKTİF LİMİTLERİ

Projective Limits of Compact Groups

Seda KINACI
Matematik Anabilim dalı

Ali Arslan ÖZKURT
Matematik Anabilim dalı

ÖZET

Bu çalışmada, Kompakt Grupların Projektif Limitleri, Abelyen Gruplara Uygulamalar ve Bazı Dualite Teorileri incelenmiştir.
Anahtar Kelimeler: Projektif Limitler, Kompakt Gruplar, Abelyen Gruplar, Dualite.

ABSTRACT

In this study, Projective Limits of Compact Groups, Applications to Abelian Groups and Some Duality Theories were studied..
Key Words: Projective Limits, Compact Groups, Abelian Groups, Duality.

Giriş

$(I, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Eğer her $i, i' \in I$ için, $i'' \leq i$ ve $i'' \leq i'$ olacak şekilde bir $i'' \in I$ varsa $(I, \leq)$ kümesine *yönlendirilmiş küme* denir. J bir yönlendirilmiş küme olsun. $j \in J$ ve G_j topolojik gruplar olmak üzere $\{f_{jk}: G_k \to G_j \mid (j,k) \in J \times J,\ j \leq k\}$ morfizmlerin bir ailesi

(i) Her $j \in J$ için $f_{jj} = 1_{G_j}$

(ii) Her $j, k, l \in J$, $j \leq k \leq l$ için $f_{jk} \circ f_{kl} = f_{jl}$

Koşullarını sağlıyorsa bu aileye topolojik grupların bir *projektif sistemi* denir.

Tanım 1: $\mathcal{P} = \{f_{jk}: G_k \to G_j \mid (j,k) \in J \times J, j \leq k\}$ topolojik grupların bir projektif sistemi olsun. Bu durumda $P = \prod_{j \in J} G_j$ olmak üzere;

$G = \left\{(g_j)_{j \in J} \in P \,\middle|\, (her\ j,k \in J)\ j \leq k \implies f_{jk}(g_k) = g_j\right\} \subseteq P$ P' nin kapalı bir alt grubudur. $i: G \to P$ içerme ve $pr_j: P \to G_j$ projeksiyon ise

$f_j = pr_j \circ i: G \to G_j$ fonksiyonu her $j \in J$ için topolojik grupların bir morfizmasıdır ve $j \leq k \in J$ olmak üzere $f_j = f_{jk} \circ f_k$ bağıntısı sağlanır.

* Yüksek Lisans Tezi-MSc. Thesis

G grubuna $\mathcal{P}$ projektif sisteminin *projektif limiti* denir ve $G = \lim_{\leftarrow} \mathcal{P}$ şeklinde gösterilir. Genellikle $G = \lim_{j\in J} G_j$ ile gösterilir. $f_j: G \to G_j$ morfizmalarına *limit fonksiyonları* ve $f_{jk}: G_k \to G_j$ morfizmlerine de *bağlantı fonksiyonları* denir.

Projektif sistemdeki tüm G_j grupları kompakt ise, G kompakt grup olur.

Örnek 1: $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\varphi_n: G_{n+1} \to G_n$ kompakt grup morfizmalarının bir dizisi

olsun. $G_1 \xleftarrow{\varphi_1} G_2 \xleftarrow{\varphi_2} G_3 \xleftarrow{\varphi_3} G_4 \xleftarrow{\varphi_4} \ldots$

O zaman $j,k \in \mathbb{N}$, $j \leq k$ için tanımlayarak kompakt grupların bir projektif sistemini elde ederiz. Morfizmler

$$f_{jk} = \varphi_j \circ \varphi_{j+1} \circ \ldots \circ \varphi_{k-1}: G_k \to G_j$$

Buradan $G = \lim_{n\in\mathbb{N}} G_n = \{(g_n)_{n\in\mathbb{N}} | (her\ n \in \mathbb{N})\ \varphi_n(g_{n+1}) = g_n\}$ dir.

(i) $G_n = \mathbb{Z}(p^n) = \mathbb{Z}/_{p^n}\mathbb{Z}$ olacak şekilde bir $p \in \mathbb{N}$ seçelim.

$\varphi_n: \mathbb{Z}(p^{n+1}) \to \mathbb{Z}(p^n)$, $\varphi_n(z + p^{n+1}\mathbb{Z}) = z + p^n\mathbb{Z}$ olarak tanımlayalım.

$$\mathbb{Z}_p = \{(z + p^n\mathbb{Z})_{n\in\mathbb{N}} | (her\ n \in \mathbb{N})\ \varphi_n(z + p^{n+1}\mathbb{Z}) = z + p^n\mathbb{Z}\}$$

Burada $\mathbb{Z}(p) \xleftarrow{\varphi_1} \mathbb{Z}(p^2) \xleftarrow{\varphi_2} \mathbb{Z}(p^3) \xleftarrow{\varphi_3} \mathbb{Z}(p^4) \xleftarrow{\varphi_4} \ldots$

Bu sistemin projektif limitine *p_adic grubu* , $\mathbb{Z}_p$, denir.

(ii) Her $n \in \mathbb{N}$ için $G_n = T$ olsun. ($T = S^1 = \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$)

$g \in T$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\varphi_n(g) = p \cdot g$ tanımlayalım. $T \xleftarrow{\times p} T \xleftarrow{\times p} T \xleftarrow{\times p} T \xleftarrow{\times p} \ldots$

Bu sistemin projektif limitine *p_adic solenoid* , T_p, denir.

Önerme 1: $j,k \in J$ ve $j \leq k$ olsun. $f_j: G \to G_j$ limit fonksiyonları ve $f_{jk}: G_k \to G_j$ kompakt grupların bir projektif sistemi için varsayalım ki $G = \lim_{j\in J} G_j$ olsun. Aşağıdaki önermeler birbirine denktir.

(i) Tüm f_{jk} bağlantı fonksiyonları örtendir.

(ii) Tüm f_j limit fonksiyonları örtendir.

İspat: (i)⟹(ii): Sabit bir $i \in J$ alalım. $h \in G_i$ olsun. $g_i = f_i(g) = h$ olacak şekilde bir $g = (g_j)_{j\in J} \in G$ bulmalıyız. Her $k \in J$ ve $i \leq k$ için $C_k = \{(x_j)_{j\in J} | (her\ j \leq k)\ x_j = f_{jk}(x_k)\ ve\ x_i = h\} \subseteq \prod_{j\in J} G_j$ tanımlayalım. f_{ik} örten olduğundan, $C_k \neq \emptyset. i \leq k \leq k'$ ise buradan $C_{k'} \subseteq C_k$ olur. Şimdi C_k , $\prod_{j\in J} G_j$ de kompakt grupların bir filtre bazıdır. O halde boş olmayan arakesiti de vardır. Varsayalım ki $g = (g_j)_{j\in J}$ bu arakesitin içinde olsun. O halde ilk olarak, $g_i = h$. İkinci olarak $j \leq k$ olsun. J yönlendirilmiş olduğundan, J'de $i \leq k \leq k'$ olduğundan $(g_j)_{j\in J} \in C_{k'}$. Buradan $g = (g_j)_{j\in J} \in G$.
(ii)⟹(i): $j \leq k$ olsun. O halde $f_j = f_{jk} f_k$ olur. Buradan $f_j = f_{jk} f_k$ olur. Buradan f_j örten ve f_k da örten olduğundan f_{jk} da örten olur.

Önerme 2: (i) $G = \lim_{j\in J} G_j$ kompakt grupların bir projektif limiti olsun.
$\mathfrak{U}_j$, G_j nin birim komşuluk filtresi, $\mathfrak{U}$, G nin birim komşuluk filtresi ve
$\mathfrak{N} = \{\ker f_j \mid j \in J\}$ olsun. O halde

- **a)** $\mathfrak{U}$, $\{f_k^{-1}(U) | k \in J , U \in \mathfrak{U}_k\}$, birimin komşuluklarının bir bazına sahiptir.
- **b)** $\mathfrak{N}$, kompakt normal alt gruplarının 1'e yakınsayan bir filtre bazıdır. (yani, U, 1'in bir komşuluğu ise, $N \subseteq U$ olacak şekilde $N \in \mathfrak{N}$ vardır.)

(ii) Diğer taraftan G kompakt grup ve $\mathfrak{N}$, $\bigcap \mathfrak{N} = \{1\}$ olacak şekilde kompakt normal alt grupların bir filtre bazı olsun.
$M, N \in \mathfrak{N}$ ve $M \subseteq N$ için
$f_{NM}: {}^{G}/_{M} \to {}^{G}/_{N}$, $f_{NM}(gM) = gN$ ile belirli doğal morfizmaları;
$G \to \lim_{N\in\mathfrak{N}} {}^{G}/_{N}$, $g \to (gN)_{N\in\mathfrak{N}}$, fonksiyonu altında limiti G ye izomorfik olan bir tam projektif sistem meydana getirir. Bu izomorfizmayla, limit fonksiyonları, $G \to {}^{G}/_{N}$ bölüm fonksiyonlarına eşittir.

İspat: (i) (a) $V \in \mathfrak{U}$ olsun. $G = \lim_{j\in J} G_j \subseteq \prod_{j\in J} G_j$

$V^{açık} \subset G$, $V = G \cap W$ şeklinde $W^{açık} \subset \prod_{j\in J} G_j$

$W = \prod_{j\in J} W_j$ sonlu tanesi dışında $W_j = G_j$

$F^{sonlu} \subset J$, $j \in F$ ise $G_j \neq W_j^{açık} \subset G_j$

$j \notin F$ ise $W_j = G_j$

$V = G \cap W \implies W_j \in \mathfrak{U}_j \implies W \bigcap \lim_{j\in J} G_j \subseteq V$

J yönlü olduğundan F'de $k \in J$ olacak şekilde bir üst sınır vardır. Her

$j \in F \implies j \leq k \implies f_{jk}: G_k \to G_j \quad U = f_{jk}^{-1}(W_j) \in \mathfrak{U}_k$

$f_k: G \to G_k$, $f_k^{-1}(U) \subset \lim_{j \in J} G_j$ $j \in F$ alalım. $k \geq j$

$$\begin{tikzcd} f_k^{-1}(U) \subset G \arrow[r] \arrow[d, "f_j"'] & G_k \supset U \arrow[dl, "f_{jk}"] \\ G_j & \end{tikzcd}$$

$f_k^{-1}(U) \in \mathfrak{U}$ 1'in komşuluğu

$f_{jk}(U) \subset W_j$ $\quad f_i(f_k^{-1}(U)) = f_{jk}(U) \subset W_j$

Dolayısıyla $f_k^{-1}(U) \subset W \implies f_k^{-1}(U) \subset G$

(i) (b) $i, j \leq k$ alalım. $kerf_k \subseteq kerf_i \cap kerf_j$
J yönlü olduğundan $\mathfrak{N}$ bir filtre bazıdır. Her bir $j \in J$ ve her $U \in \mathfrak{U}$ için $kerf_j = f_j^{-1}(1) \subseteq f_j^{-1}(U)$ (a)'dan $f_j^{-1}(U)$ birimin temel komşuluğu olduğundan ispat biter.

(**ii**) $N \leq M \Leftrightarrow M \subseteq N$ olsun. $\mathfrak{N}$ de $M \subseteq N$ için tüm f_{NM} morfizmalarının ailesi, kompakt grupların bir tam projektif sistemini oluşturur. $g_N \in G$ olup $(g_N N)_{N \in \mathfrak{N}} \in \prod_{N \in \mathfrak{N}} G/N$ elemanının $L = \lim_{N \in \mathfrak{N}} G/N$ limitinde olması için gerek ve yeter koşul, $\mathfrak{N}$'de her bir $M \supseteq N$ ikilisi için $f_{MN}(g_N N) = g_M M$ yani $g_M^{-1} g_N \in M$ olmasıdır. Buradan her bir $g \in G$ için $(gN)_{N \in \mathfrak{N}} \in L$ olur.

$\varphi = (g \to (gN)_{N \in \mathfrak{N}}): G \to L$ morfizmasının çekirdeği $\cap \mathfrak{N} = \{1\}$. O halde <u>$\varphi$ birebirdir.</u>

Varsayalım ki $\lambda = (g_N N)_{N \in \mathfrak{N}} \in L$ olsun. O halde $\{g_N N | N \in \mathfrak{N}\}$, G'de kompakt kümelerin bir filtre bazıdır. $M \supseteq N$ olduğundan $g_M^{-1} g_N \in M$ ve buradan $g_N \in g_M M \cap g_N N$. O halde arakesit bir g elemanını içerir. Buradan $g \in g_N N \implies gN = g_N N \implies \varphi(g) = \lambda$. Buradan <u>$\varphi$ örtendir</u>.

O halde φ kompakt grupların bir izomorfizmasıdır. $q_N: G \to G/N$ bölüm fonksiyonu ve $f_N((g_N N)_{N \in \mathfrak{N}}) = g_N N$ ile tanımlı $f_N: L \to G/N$ limit fonksiyonu ise $q_N = f_N \circ \varphi$ olduğu açıktır.

Tanım 2: Tüm bağlantı fonksiyonlarının ve tüm limit fonksiyonlarının örten olduğu topolojik grupların projektif sistemine *(strict) tam projektif sistem* ve onun limitine de *tam projektif limit* denir.

Teorem 1: Bir yerel kompakt grup G için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.
(1) Birimin komşuluk filtresi açık altgrupların bir bazına sahiptir.
(2) G tamamen bağlantısızdır.
G, kompakt ise, bu ifadeler aşağıdaki durumlara da denktir.
(3) Birimin komşuluk filtresi açık normal altgrupların bir bazına sahiptir.
(4) G, sonlu grupların bir tam projektif limitidir.

Tanım 3: G bir topolojik (abelyen) grup olsun. (toplamsal notasyon kullanılır)

$$Hom(G,S^1)=\{f : f: G \to S^1 \ \ grup\ homomorfizması\} \subset (S^1)^G = \prod_{g\in G} S_g$$

$$\prod_{g\in G} S_g = \{f : f: G \to \bigcup_{g\in G} S_g \ \ ; \ f(g) \in S_g = S^1 \ her\ g \in G\ için\}$$

$$= \{f : f: G \to S^1 \ \ fonksiyon\}$$

$Hom(G,S^1) \subset (S^1)^G$ alt grubuna G abelyen grubunun *karakter grubu* denir ve $\hat{G}$ ile gösterilir.

Tanım 4: G, herhangi bir kompakt abelyen grup olmak üzere $\eta_G : G \to \hat{\hat{G}}$ bir izomorfizma ise G, *dualiteye sahiptir* denir.

Önerme 3: $G = \lim_{j\in J} G_j$ bir tam projektif limit ise $\hat{G} = \bigcup_{j\in J} \hat{G}_j$

İspat: $\hat{G}$ 'nin bir altgrubu olarak $\hat{G}_j$ 'nin tanımından $\bigcup_{j\in J} \hat{G}_j \subseteq \hat{G}$. Varsayalım ki $\lambda: G \to T$ G'nin bir karakteri olsun. T'de $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ ün görüntüsüne V dersek, $\{0\}$, V'de içerilen T'nin tek altgrubu olur. $U = \lambda^{-1}(V)$, G'de 0'ın bir açık komşuluğudur. Bir $j \in J$ vardır öyle ki $kerf_j \subseteq U$. Buradan $\lambda(kerf_j)$ V'de içerilen T'nin bir altgrubudur ve $\lambda(kerf_j) = \{0\}$ dır. O halde $kerf_j \subseteq ker\lambda$ ve tek bir $\lambda_j : G_j \to T$ morfizması vardır öyle ki $\lambda = \lambda_j \circ f_j$. O halde kesinlikle $\lambda \in \hat{G}_j \Rightarrow \hat{G} \subseteq \bigcup_{j\in J} \hat{G}_j$.

Örnek 2:(i) Tüm *p*_adic tamsayılarının grubu , $\mathbb{Z}_p$, dualiteye sahiptir ve karakter grubu $\mathbb{Z}(p^\infty) = \frac{1}{p^\infty}\mathbb{Z} / \mathbb{Z}$ T' de *p*_nin kuvveti olan tüm elemanların grubudur. $n = 1,2,\ldots$ için birimin tüm p^n_inci köklerinin altgrubuna izomorftur.
(ii) p_adic solenoid , T_p , dualiteye sahiptir ve karakter grubu $\frac{1}{p^\infty}\mathbb{Z}$ $m \in \mathbb{Z}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere m/p^n şeklinde belirtilebilen tüm rasyonel sayıların altgrubudur.

Kaynaklar

HOFMANN, K.H., MORRİS, S.A., The Structure of Compact Groups
PONTRYAGİN, L.S., Topological Groups
BAKER, A., Matrix Groups, An Introduction to Lie Group Theory