İNTERPOLASYON VE KALAN TEORİSİ *

*Interpolation and Remainder Theory **

Figen GÜLTÜRK
Matematik Anabilim Dalı

Yusuf KARAKUŞ
Matematik Anabilim Dalı

ÖZET

Bu çalışmada İnterpolasyon tanımlanmış, Lagrange İnterpolasyon Formülü ile Newton İnterpolasyon Formülü incelenmiş ve örnekler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Lagrange İnterpolasyon, Newton İnterpolasyon

ABSTRACT

In this study Interpolation, Lagrange Interpolation Formula and Newton Interpolation Formula were investigated and examples were solved.

Key Words: Lagrange Interpolation, Newton İnterpolation

Giriş

I aralığında tanımlı ve sürekli bir f(x) fonksiyonu verilsin. I' nın n+1 tane farklı noktası $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ olsun. $\wp_n$, n-inci dereceden polinomlar kümesini göstersin.

$$p(x_i) = f(x_i), \qquad x_i \in I \qquad i = 0,1,...,n$$ [1]

olacak şekilde bir $p \in \wp_n$ polinomu bulma işlemine interpolasyon ve $p(x)$ polinomuna da x_i noktalarında $f(x)$ için interpolasyon polinomu denir. x_i, $i = 0,1,...,n$ noktalarına ise , interpolasyon düğümleri adı verilir.

İnterpolasyonun diğer gösterimleri olan Lagrange Formülü ve Newton Formülü, Davis (Davis, 1975) 'te verilmiştir.

Teorem 1: n + 1 tane $z_o, z_1, \ldots, z_n$ (gerçel veya kompleks) farklı noktaları ve n + 1 tane $w_0, w_1, \ldots, w_n$ (gerçel veya kompleks) değerleri verilsin. $\wp_n$ n-inci dereceden polinomlar kümesini göstersin.

$$p_n(z_i) = w_i \qquad i = 0,1,2,\ldots,n$$

olacak şekilde bir tek $p_n(z) \in \wp_n$ polinomu vardır.

*Yüksek Lisans Tezi-MSc. Thesis

Lagrange İnterpolasyon Formülü

z_0 , z_1 , ... , z_n farklı noktalar olsun ve n. dereceden

$$l_k(z) = \frac{(z-z_0)(z-z_1)\ldots(z-z_{k-1})(z-z_{k+1})\ldots(z-z_n)}{(z_k-z_0)(z_k-z_1)\ldots(z_k-z_{k-1})(z_k-z_{k+1})\ldots(z_k-z_n)} \quad k=0,1,\ldots,n \tag{1}$$

polinomlarını göz önüne alalım ve burada

$$l_k(z_j) = \delta_{kj} = \begin{cases} 0 & eğer\ \ k \neq j\ ise \\ 1 & eğer\ \ k = j\ ise \end{cases} \tag{2}$$

dir.

$w_0, w_1, \ldots, w_n$ değerleri için

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} w_k\, l_k(z) \tag{3}$$

polinomu $\wp_n$ ’dedir. Bu formül Lagrange Interpolasyon Formülü olarak adlandırılır. $p_n(z)$ ’nin açık şekli:

$$p_n(z_k) = w_0 l_0(z_k) + w_1 l_1(z_k) + \ldots + w_k l_k(z_k) + \ldots + w_n l_n(z_k)$$

olduğundan

$$p_n(z_k) = w_k \qquad k = 0,1,\ldots,n \tag{4}$$

dir. Bu interpolasyon problemi tek bir çözüme sahiptir.

Bir alterne form yararlı olacaktır.

$$w(z) = (z-z_0)(z-z_1)\ldots(z-z_{k-1})(z-z_k)(z-z_{k+1})\ldots(z-z_n) \tag{5}$$

O zaman

$$w'(z_k) = (z_k-z_0)(z_k-z_1)\ldots(z_k-z_{k-1})(z_k-z_{k+1})\ldots(z_k-z_n) \tag{6}$$

dır. Böylece (1) formülü :

$$l_k(z) = \frac{w(z)}{(z-z_k)w'(z_k)} \tag{7}$$

olur. (3) formülü :

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} w_k \frac{w(z)}{(z-z_k)w'(z_k)} \tag{8}$$

olur.

$l_k(z)$ polinomları noktasal interpolasyon için temel polinom olarak adlandırılır.

w_i sayıları, z_i noktalarında $f(z)$ fonksiyonunun aldığı değerlerdir, yani $w_i = f(z_i)$ ’dir. (8) ile verilen $p_n(z)$ polinomu $z_0, z_1, \ldots, z_n$ noktalarında $f(z)$ fonksiyonunun aldığı w değerlerinden oluşur.

Eğer ,

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f(z_k) l_k(z) = \sum_{k=0}^{n} f(z_k) \frac{w(z)}{(z - z_k) w'(z_k)} \tag{9}$$

ise

$$p_n(z_k) = f(z_k) \qquad k = 0, 1, \dots, n \tag{10}$$

dir. Burada (9) interpolasyon probleminin aldığı yeni şekil ve (10) da onun çözümüdür.

Temel polinomların önemi (2) özdeşliğinde yatar ve interpolasyon probleminin (9) 'daki açık şekliye sonuçlanır.

$$L_0(f) = f(z_0), \quad L_1(f) = f(z_1), \dots, L_n(f) = f(z_n)$$

$$L_i(l_j) = \delta_{ij} \tag{11}$$

olarak yazılabilir.

Bu durumda $l_i(z)$ polinomları ve L_i fonksiyonellerine biortonormal denir. Verilen lineer bağımsız fonksiyoneller kümesi için polinomların biortonormal kümesini daima bulabiliriz. Gerçekten aşağıdaki teoremde Lagrange formülünün genelleştirilmişine sahip oluruz.

Teorem 2: X, n boyutlu bir vektör uzayı olsun. $L_1, L_2, \dots, L_n$ X* 'da n tane lineer bağımsız fonksiyonel olsun. O zaman X 'in n tane lineer bağımsız $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ elemanları

$$L_i(x_j^*) = \delta_{ij} \tag{12}$$

olacak şekilde tek olarak belirlenir.

Herhangi bir $x \in$X için,

$$x = \sum_{i=1}^{n} L_i(x) x_i^* \tag{13}$$

dır.

$w_1, w_2, \dots, w_n$ 'lerin her seçimi için,

$$x = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i^* \tag{14}$$

elemanı

$$L_i(x) = w_i \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{15}$$

interpolasyon probleminin tek çözümüdür.

Örnek 1 (Taylor İnterpolasyonu) : $X = \wp_n$

$$L_0(f) = f(z_0), \quad L_1(f) = f'(z_0), \dots, L_n(f) = f^{(n)}(z_0)$$

z_0 =0 alırsak,

$$X = \wp_n \quad L_0(f) = f(0), \quad L_1(f) = f'(0), \ldots, L_n(f) = f^{(n)}(0)$$

olur.

$$l_n(z) = \frac{z^n}{n!} \qquad n = 0, 1, \ldots \quad \text{olsun. O zaman}$$

$$l_0(z) = \frac{z^0}{0!} = 1, \; l_1(z) = z, \; l_2(z) = \frac{z^2}{2!}, \; l_3(z) = \frac{z^3}{3!}, \ldots,$$

dir.

(11) bağlantısına göre,

$$L_i(l_j) = l_j^{(i)}(0) = \left(\frac{z^j}{j!}\right)^{(i)}_{(0)} = \frac{j(j-1)\ldots(j-(i-1))(z^{j-i})_{(0)}}{j!} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} = \delta_{ij}$$

bulunur.

Newton Formülü

(3) ve (14) Lagrange İnterpolasyon formülleri bazı engeller içermektedirler. Eğer n boyutlu uzaydan, bir boyut yüksek olan uzaya geçmek istersek $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ eski kümesiyle ilgili olmayan $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_{n+1}^*$ elemanlarının tamamen yeni bir kümesini belirlemeliyiz. Newton gösterimiyle hem $x_1, x_2, \ldots$ baz elemanlarının hem de $L_1, L_2, \ldots$ belirlenmiş fonksiyonellerinin lineer kombinasyonunu alarak bu engeller ortadan kaldırılmaya çalışılır.

$z_0, z_1, \ldots, z_n$ n +1 farklı nokta olsun. n+1 tane bağımsız Newton polinomu şeklindedir.

Verilen $w_0, w_1, \ldots, w_n$ değerleri için ,

$$p(z_i) = w_i \qquad i = 0,1, \ldots, n$$

olacak şekilde $\wp_n$ ’de bir tek p polinomu vardır.

Eğer bu eleman

$$p(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)(z - z_1) + \ldots + a_n(z - z_0)(z - z_1)\ldots(z - z_{n-1}) \quad (16)$$

formunda temsil edilebilirse söz konusu polinom görülmüş olur.

a_i sabitlerini bulmak için ardışık olarak $z = z_0, \; z = z_1, \; \ldots$ koyulur ve elde elde edilen lineer denklemler çözülür. Böylece

$$
\begin{aligned}
a_0 &= w_0 \\
a_1 &= \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0} \\
a_2 &= \frac{1}{z_2 - z_1}\left(\frac{w_2 - w_0}{z_2 - z_0} - \frac{w_1 - w_0}{z_1 - z_0}\right) \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{17}
$$

bulunur.

$z_0, \dots, z_n$ noktalarının belirli kümesi için her a_i, w_i 'lerin bir lineer kombinasyonudur. Ve üstelik a_0 yalnız w_0 'a bağlıdır. a_1 w_0, w_1, z_0, z_1 'e bağlıdır ve a_2 ise $w_0, w_1, w_2, z_0, z_1, z_2$' ye bağlıdır.

Tanım 1 : (17) ile ifade edilen a_j sabitlerine $z_0, z_1, \dots, z_j$ **'ye göre** $w_0, w_1, \dots, w_j$ değerlerinin j-inci kesirli farkı denir ve

$$a_j = \left[w_0, w_1, \dots, w_j\right] \tag{18}$$

şeklinde gösterilir.

(16) 'da z^n 'in katsayısı a_n , (8) 'de z^n 'in katsayısı $\sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{w'(z_k)}$ 'dır.

Bundan dolayı

$$a_n = \left[w_0, w_1, \dots, w_n\right] = \sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{w'(z_k)} \tag{19}$$

bulunur. Burada

$$w(z) = w_n(z) = (z - z_0)(z - z_1)...(z - z_n)$$

dir. (19) 'dan

$$
\begin{aligned}
a_0 &= w_0 \\
a_1 &= \frac{w_0}{z_0 - z_1} + \frac{w_1}{z_1 - z_0} \\
a_2 &= \frac{w_0}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)} + \frac{w_1}{(z_1 - z_0)(z_1 - z_2)} + \frac{w_2}{(z_2 - z_0)(z_2 - z_1)}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

dir.

Eğer w_i 'ler f fonksiyonunun z_i 'deki $f(z_i) = w_i$ değerleri olarak alınırsa,

(16) ve (18) 'i birleştirerek;

$$p_n(f;z) = \sum_{k=0}^{n} \left[f(z_0), f(z_1), \ldots, f(z_k) \right] (z - z_0)(z - z_1) \ldots (z - z_{k-1}) \tag{21}$$

$$w_{-1}(z) \equiv 1$$

elde edilir.

Tanım 2 : İnterpolasyon polinomunun (21) formuna bir *f(z)* fonksiyonu için Sonlu Newton Serisi denir.

$z_0, z_1, \ldots, z_n$ sabitleri için $L_0, L_1, \ldots, L_n$ lineer fonksiyonellerini (20) şemasına uygun olarak aşağıda olduğu gibi tanımlayalım.

$$\begin{aligned} L_0(f) &= f(z_0) \\ L_1(f) &= \frac{f(z_0)}{z_0 - z_1} + \frac{f(z_1)}{z_1 - z_0} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{22}$$

olur. Burada $L_k(f) = a_k, \quad f(z_i) = w_i$ *i* =0,1,2, . . . 'dir.

Bu durumda (21) formülü:

$$p_n(f;z) = \sum_{k=0}^{n} L_k(f) w_{k-1}(z) \tag{23}$$

şeklini alır.

Eğer $0 \le j \le n-1$ ise, $w_j(z) \in \wp_n$ olduğundan

$$w_j(z) = p_n(w_j(z);z) \Leftrightarrow p_n(w_j(z);z) - w_j(z) = 0 \tag{*}$$

olur ve böylece

$$w_j(z) = \sum_{k=0}^{n} L_k(w_j(z)) w_{k-1}(z) \tag{24}$$

elde edilir.

(*) 'daki eşitlikler $z = z_0, z_1, \ldots, z_n$ değerleri için n +1 farklı noktada sağlanır. Bu n. dereceden bir polinomun n+1 defa 0 olduğunu gösterir. O halde bu polinom 0'a özdeştir. Bundan dolayı (*) 'ın 1. eşitliğini ve (23) 'ü kullanarak da (24) 'ü elde ederiz.

(24) 'te ardışık olarak j = 0,1,2, . . . alınırsa

$$L_k(w_{j-1}(z)) = \delta_{kj} \tag{25}$$

olur.

Teorem 3 : X sonsuz boyutlu bir vektör uzay ve X 'in elemanlarının bir dizisi $x_1, x_2, \ldots$ olsun. Her n için $x_1, \ldots, x_n$'ler lineer bağımsız ve X* 'daki lineer fonksiyonellerin bir dizisi $L_1, L_2, ...$ olsun. Her n için nxn determinantı olan

$$\left| L_i(x_j) \right|_{i,j=1}^{n} \neq 0 \tag{26}$$

kabul edelim.

O zaman $a_{ii} \neq 0$ olmak üzere a_{ij} ve b_{ij} sabitlerinin tek olarak belirlediği

$$\begin{aligned} L_1^* &= a_{11}L_1 & x_1^* &= x_1 \\ L_2^* &= a_{21}L_1 + a_{22}L_2 & x_2^* &= b_{21}x_1 + x_2 \\ L_3^* &= a_{31}L_1 + a_{32}L_2 + a_{33}L_3 & x_3^* &= b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + x_3 \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned} \tag{27}$$

şeklinde iki üçgensel bölge varsa

$$L_i^*(x_j^*) = \delta_{ij}, \quad \text{i,j} = 1,2,\ldots \tag{28}$$

dir.

Sonuç 1 : X_n, x 'in $x_1, \ldots, x_n$ tarafından gerilmiş bir alt uzayı olsun (yani X_n, $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n$ lineer kombinasyonunun kümesi olsun). Eğer $x \in X_n$ ise o zaman

$$x = \sum_{k=1}^{n} L_k^*(x)x_k^*$$

dır.

Bir $x \in X$ elamanı için $\sum_{k=1}^{\infty} L_k^*(x)x_k^*$ serisine biortogonal açılım denir.

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} L_k^*(x)x_k^* \tag{29}$$

yazılır.

Kaynaklar

DAVIS, P. J., 1975. Interpolation and Approximation . Dover Publication , Inc., New York.

HAASER, N. B., SULLİVAN, J. A., 1971. Reel Analysis. Van Nostrand Reinhold Company, New York.