Ç.Ü Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi Yıl:2012 Cilt:28-2

SERBEST LİE CEBİRLERİNİN ALT MERKEZİ VE POLİSENTRAL SERİLERİNİN TERİMLERİNİN KESİŞİMLERİ *

Intersections of Terms of Polycentral Series and Lower Central Series of Free Lie Algebras

Zeynep KÜÇÜKAKÇALI
Matematik Anabilim Dalı

Ela AYDIN
Matematik Anabilim Dalı

ÖZET

Bu çalışma L bir serbest Lie cebiri olmak üzere L nin alt merkezi ve polisentral serilerinin terimlerinin arakesitlerinin belirlenmesi ile ilgilidir. Gruplar için T. C. Hurley tarafından elde edilen sonuçlar kullanılarak benzer sonuçlar serbest Lie cebirleri için de elde edilmiştir. Bazı durumlar için örnekler yapılmıştır.
Anahtar Kelimeler: Alt merkezi seriler, polisentral seriler.

ABSTRACT

This study is concerned with the identification the intersections of terms of polycentral series with the lower central series of a free group. The results from the group case which derivation by T. C. Hurley are used to derive analogous results for the free Lie algebra. Examples were made for some cases.
Key words: Lower central series, polycentral series.

Giriş

L bir K cismi üzerinde bir Lie cebiri olsun. L nin alt merkezi serisini
$L_1 = L \geq L_2 = [L, L] \geq \cdots \geq L_n = [L_{n-1}, L] \geq \cdots$ olarak tanımlayalım.
Eğer bir $q \in Z^+$ için $L_{q-1} \neq \{0\}$ fakat $L_q = \{0\}$ oluyorsa L ye q-inci dereceden nilpotent Lie cebiri denir.
L nin alt merkezi serisinin terimleri $L_n \lhd L_{n-1} \lhd \cdots \lhd L_1$ olacak şekilde idealler zinciri meydana getirir. Bu durumda L_n/L_{n+1} ve L/L_n faktörlerinden bahsedebiliriz.
L bir K cismi üzerinde bir Lie Cebiri, $n \in N$ için $\{L_n\}$ L nin alt merkezi serisi, $\{n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots\}$ $n_i \geq 1$ tamsayıların bir dizisi olsun.
$L_{n_1} \geq L_{n_1,n_2} \geq \cdots \geq L_{n_1,n_2,\ldots,n_{k-1}} \geq L_{n_1,n_2,\ldots,n_{k-1},n_k} \geq \cdots$
Polisentral serisi aşağıdaki şekilde tanımlanır.
L_{n_1} L nin alt merkezi serisinin n_1-inci terimi
L_{n_1,n_2} L_{n_1} in alt merkezi serisinin n_2-inci terimi
.
.
.
$L_{n_1,n_2,\ldots,n_{k-1},n_k}$ise $L_{n_1,n_2,\ldots,n_{k-1}}$ in alt merkezi serisinin n_k-inci terimi dir.

* Yüksek Lisans Tezi-MSc. Thesis

Eğer $L_{n_1,n_2,\dots,n_{k-1},n_k} = \{0\}$ ve n_i lerin hiçbirisi bu eşitlik sağlanacak şekilde daha küçük tamsayılarla değiştirilemiyorsa L ye $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ dizisine göre polinilpotent Lie cebiri denir.

Tanım 1: Herhangi bir L Lie cebiri ve $n \geq 2$ için $r_1 + \cdots + r_n = r$ eşitliğinde $r_i \geq 0$ olacak şekilde r $(r \in Z)$ nin tüm parçalanışlarından sıra gözetmeksizin farklı olanları ile

$L(m, n; r) = \sum[L_{m+r_1}, \dots, L_{m+r_n}]$ eşitliği tanımlansın.

Eğer $n = 1$ ise $L(m, 1;\ r) = L_{m+r}$ olarak tanımlanır.

Buradan açık ki $L(m, n;\ 0) = L_{m,n}$ dir. Gösterelim.

$L(m, n;\ 0) = \sum[L_{m+r_1}, \dots, L_{m+r_n}]$ olup $r_1 + \cdots + r_n = r = 0$ dır. O zaman tüm r_i ler negatif olmayan tamsayılar olduğundan 0 olmak zorundadır.

$$\sum[L_{m+r_1}, \dots, L_{m+r_n}] = [L_m, \dots, L_m]$$
$$= \big[[[L_m, L_m], L_m], \dots, L_m\big] \text{ olup}$$

$(L_m)_n = L_{m,n}$ elde edilir.

Örnek 1: $L(m, n;\ r) = \sum[L_{m+r_1}, \dots, L_{m+r_n}]$ olup

$m = 3$, $n = 2$ ve $r = 4$ alalım.

$r_1 + r_2 = 4$

$4 = 4 + 0 \quad \rightarrow \quad [L_7, L_3]$
$4 = 3 + 1 \quad \rightarrow \quad [L_6, L_4]$
$4 = 2 + 2 \quad \rightarrow \quad [L_5, L_5]$
$4 = 1 + 3 \quad \rightarrow \quad [L_4, L_6]$
$4 = 0 + 4 \quad \rightarrow \quad [L_3, L_7]$

Lie cebirlerinde anti komütatiflik olduğundan

$L(3, 2;\ 4) = \sum[L_{3+r_1}, L_{3+r_2}] = [L_7, L_3] + [L_6, L_4] + [L_5, L_5]$ dir.

Örnek 2: $m = 2$, $n = 3$ ve $r = 3$ alalım.

$r_1 + r_2 + r_3 = 3$

$3 = 3 + 0 + 0 \quad \rightarrow \quad [[L_5, L_2], L_2]$
$3 = 2 + 1 + 0 \quad \rightarrow \quad [[L_4, L_3], L_2]$
$3 = 2 + 0 + 1 \quad \rightarrow \quad [[L_4, L_2], L_3]$
$3 = 1 + 2 + 0 \quad \rightarrow \quad [[L_3, L_4], L_2]$
$3 = 1 + 0 + 2 \quad \rightarrow \quad [[L_3, L_2], L_4]$
$3 = 1 + 1 + 1 \quad \rightarrow \quad [[L_3, L_3], L_3]$
$3 = 0 + 3 + 0 \quad \rightarrow \quad [[L_2, L_5], L_2]$
$3 = 0 + 0 + 3 \quad \rightarrow \quad [[L_2, L_2], L_5]$
$3 = 0 + 1 + 2 \quad \rightarrow \quad [[L_2, L_3], L_4]$
$3 = 0 + 2 + 1 \quad \rightarrow \quad [[L_2, L_4], L_3]$

O zaman

$$L(2, 3;\ 3) = \sum[L_{2+r_1}, L_{2+r_2}, L_{2+r_3}] = [[L_5, L_2], L_2] + [[L_4, L_3], L_2] + [[L_3, L_3], L_3]$$

olur.

Tanım 2: n ağırlığına sahip β^n braket düzenlemesi $n = 1, 2, \dots$ için yıldız dizileri ve braket çarpımla aşağıdaki şekilde tanımlanır.
Bir ağırlığına sahip sadece 1 tane braket düzenlemesi vardır.
$\beta^1(*) = (*)$
$n > 1$ ağırlığına sahip β^n braket düzenlemesi $k + l = n$ için k ve l ağırlığına sahip β^k ve β^l braket düzenlemeleri ile $\beta^n = (\beta^k, \beta^l)$ olarak elde edilir.
Bu tanıma göre 2 ağırlığına sahip tek braket düzenlemesi vardır ve $[(*), (*)]$ dır. 3 ağırlığına sahip tek braket düzenlemesi vardır ve $[[(*), (*)], (*)]$ dır.
Kolaylık olması açısından $(*)$ ifadesindeki parantezler kaldırılarak alışılmış yazım kullanılabilir. Yani
1 ağırlığına sahip braket düzenlemesi için $*$
2 ağırlığına sahip braket düzenlemesi için $[*,*]$
3 ağırlığına sahip braket düzenlemesi için $[[*,*],*]$ yazılır.
Lemma 1: L Lie cebirinin $I_1, \dots, I_s$ idealleri, s ağırlığına sahip β^S braket düzenlemesi ve $1, \dots, s$ nin bir (sabit) ρ permütasyonu verilsin. $1, \dots, s$ nin tüm permütasyonlar δ üzerinden $\beta^s(I_{\rho(1)}, \dots, I_{\rho(s)}) \subseteq \sum_\delta [A_{\delta(1)}, \dots, A_{\delta(s)}]$ olarak tanımlıdır.
İspat: ρ permütasyonunu birim permütasyon olarak varsayabiliriz.
$s = 2$ olsun.
$s = 2$ iken $2! = 2$ tane permütasyon vardır. Bunlar $\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ve $\delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ dir.
$\beta^2(I_{\rho(1)}, I_{\rho(2)}) = \beta^2(I_1, I_2) = [I_1, I_2]$ olur.
$\sum_\delta [I_{\delta(1)}, I_{\delta(2)}] = [I_{\delta_1(1)}, I_{\delta_1(2)}] + [I_{\delta_2(1)}, I_{\delta_2(2)}] = [I_1, I_2] + [I_2, I_1]$ dir.
$[I_1, I_2]$, $[I_1, I_2] + [I_2, I_1]$ nin lineer toplamı olduğundan istenen sağlanır.
$s = 3$ için de aynı şekilde yapılır.
$s > 3$ ve varsayalım ki $\beta^s = \beta^t * \beta^q$ iken
$\beta^s(I_1, \dots, I_s) = [\beta^t(I_1, \dots, I_t), \beta^q(I_{t+1}, \dots, I_s)]$ olsun.
Tümevarım hipotezinden
$\beta^t(I_1, \dots, I_t) \subseteq \sum_\delta [I_{\delta(1)}, \dots, I_{\delta(t)}]$ ve $\beta^q(I_{t+1}, \dots, I_s) \subseteq \sum_\rho [I_{\rho(t+1)}, \dots, I_{\rho(t)}]$ dir. Bu yüzden
$\left[[I_{\delta(1)}, \dots, I_{\delta(t)}], [I_{\rho(t+1)}, \dots, I_{\rho(s)}]\right] \subseteq \sum_\delta [I_{\delta(1)}, \dots, I_{\delta(s)}]$ olduğunu göstermek yeterlidir. (1)
$t \geq q$ varsayıp ispatı q üzerinden tümevarımla yapabiliriz.
$q = 1$ olsun.
$\left[[I_{\delta(1)}, \dots, I_{\delta(t)}], I_{\rho(t+1)}\right] = \left[[I_{\delta(1)}, \dots, I_{\delta(t)}], I_{\delta(t+1)}\right] \subseteq \sum_\delta [I_{\delta(1)}, \dots, I_{\delta(t)}, I_{\delta(t+1)}]$ olup ispat biter. Çünkü bir elemanın tek permütasyonu vardır. P yerine δ da yazsak farketmez.
Eğer $q > 1$ ise
$\left[[I_{\delta(1)}, \dots, I_{\delta(t)}], [I_{\rho(t+1)}, \dots, I_{\rho(s-1)}, I_{\rho(s)}]\right]$ ifadesinde $A = I_{\delta(1)}, \dots, I_{\delta(t)}$ $B = I_{\rho(t+1)}, \dots, I_{\rho(s-1)}$ ve $C = I_{\rho(s)}$ alıp yerine $[A, [B, C]]$ yazalım. O zaman ifademiz yerine
$[A, [B, C]] = -[C, [A, B]] - [B, [C, A]]$

$$= -\left[I_{\rho(s)}, \left[I_{\delta(1)}, \dots, I_{\delta(t)}, I_{\rho(t+1)}, \dots, I_{\rho(s-1)}\right]\right] - \left[I_{\rho(t+1)}, \dots, I_{\rho(s-1)}, \left[I_{\rho(s)}, I_{\delta(1)}, \dots, I_{\delta(t)}\right]\right]$$

Eşitliğin sağ tarafına uygulanan tümevarım hipotezinden istenilen elde edilir.

Lemma 2:

i) $L(m,n;r) \subseteq L(m,n;r-1)$ $(r \geq 1)$.

ii) $[L(m,n;r), L(m,p;s)] \subseteq L(m,n+p;r+s)$.

iii) $[L(m,n;r), L(m,n;s)] \subseteq L(m,n;r+s+1)$.

iv) $L(m,n+1;r) \subseteq L(m,n;r+1)$.

İspat : i) $n = 1$ iken $L(m,1;r) = L_{m+r}$ idi.

$L_{m+r} \subseteq L_{m+r-1=}$ $L(m,1;r-1)$ olup istenilen sağlanır.

$n > 1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$L(m,n;r) = \sum_r \left[L_{m+r_1}, \dots, L_{m+r_n}\right] \subseteq \sum_r \left[L_{m+r_1-1}, \dots, L_{m+r_n}\right]$$

$$= \textstyle\sum_{r-1}\left[L_{m+r_1-1}, \dots, L_{m+r_n}\right] = L(m,n;r-1) \text{ olur.}$$

ii) $[L(m,n;r), L(m,p;s)] = \left[\sum_r\left[L_{m+r_1}, \dots, L_{m+r_n}\right], \sum_s\left[L_{m+s_1}, \dots, L_{m+s_p}\right]\right]$ dir. Eğer $n = 1$ ve $p = 1$ ise

$L(m,1;r) = L_{m+r}$ ve $L(m,1;s) = L_{m+s}$ olur.

$\left[\sum_r\left[L_{m+r_1}, \dots, L_{m+r_n}\right], \sum_s\left[L_{m+s_1}, \dots, L_{m+s_p}\right]\right] = [L_{m+r}, L_{m+s}]$ dir.

$[L_{m+r}, L_{m+s}] \subseteq \sum_{r+s}[L_{m+r}, L_{m+s}] = L(m,2;r+s)$ olup istenen sağlanır.

$n, p > 1$ iken ispatı yapalım.

$[L(m,n;r), L(m,p;s)] = \left[\sum_r\left[L_{m+r_1}, \dots, L_{m+r_n}\right], \sum_s\left[L_{m+s_1}, \dots, L_{m+s_p}\right]\right]$ Lemma 3.9 dan

$$\subseteq \textstyle\sum_{r,s}\left[\left[L_{m+r_1}, \dots, L_{m+r_n}\right], \left[L_{m+s_1}, \dots, L_{m+s_p}\right]\right]$$

$$\subseteq \textstyle\sum_{r,s}\left[L_{m+r_1}, \dots, L_{m+r_n}, L_{m+s_1}, \dots, L_{m+s_p}\right]$$

$$= \textstyle\sum_{r+s}\left[L_{m+r_1}, \dots, L_{m+r_n}, L_{m+s_1}, \dots, L_{m+s_p}\right] = L(m,n+p;r+s)$$

olur.

iii) $n = 1$ için $L(m,1;r) = L_{m+r}$ ve $L(m,1;s) = L_{m+s}$ dir.

$[L(m,1;r), L(m,1;s)] = [L_{m+r}, L_{m+s}]$

$\subseteq L_{m+r+m+s} \subseteq L_{m+r+s+1} = L(m,1;r+s+1)$ dir.

$n > 1$ iken ispat edelim.

$\left[L_{m+r_1}, \dots, L_{m+r_n}\right] \subseteq \left[L_{m+r_1+m+r_2}, L_{m+r_3,} \dots, L_{m+r_n}\right]$ ve

$\subseteq \left[L_{m+r_1+r_2+1}, L_{m+r_3}, \dots, L_{m+r_n}\right]$ dir. Böylece

$$[L(m,n;r), L(m,n;s)] \subseteq \textstyle\sum_{r,s}\left[\left[L_{m+r_1++r_2+1}, L_{m+r_3}, \dots, L_{m+r_n}\right], \left[L_{m+s_1}, \dots, L_{m+s_n}\right]\right]$$

$$\subseteq \textstyle\sum_{r,s}\left[L_{m+r_1++r_2+1}, L_{m+r_3}, \dots, L_{m+r_n}, L_{m+s_1}, \dots, L_{m+s_n}\right]$$

$$= \textstyle\sum_{r+s+1}\left[L_{m+r_1++r_2+1}, L_{m+r_3}, \dots, L_{m+r_n}, L_{m+s_1}, \dots, L_{m+s_n}\right]$$

$$\subseteq \textstyle\sum_{r+s+1}\left[L_{m+r_1++r_2+1+s_1}, L_{m+r_3+s_2}, \dots, L_{m+r_n+s_{n-1}}, L_{m+s_n}\right]$$

$$= L(m,n;r+s+1) \text{ olur.}$$

iv) $n = 1$ için $L(m,2;r) = \sum_r\left[L_{m+r_1}, L_{m+r_2}\right]$

$\sum_r\left[L_{m+r_1}, L_{m+r_2}\right] \subseteq L_{m+r_1+m+r_2} \subseteq L_{m+r_1+r_2+1} = L(m,1;r_1+r_2+1)$

$= L(m, 1; r+1)$ olur.

$n > 1$ için yapalım.

$L(m, n+1; r) = \sum_r [L_{m+r_1}, \dots, L_{m+r_{n+1}}] \subseteq \sum_r [L_{m+r_1+r_2+1}, \dots, L_{m+r_{n+1}}]$
$= \sum_{r+1} [L_{m+r_1+r_2+1}, \dots, L_{m+r_{n+1}}] = L(m, n; r+1)$ dir.

Lemma 3: L Lie cebirinin A, B, C idealleri verilsin. Varsayalım ki $a \in A, b \in B, c \in C$ olsun. O zaman
$[[a,b],c] + [[b,c],a] + [[c,a],b] \equiv 0$ modülo $[[A,B],[A,C]] + [[A,B],[B,C]] + [[A,C],[B,C]]$.

Sonuç 1: Varsayalım ki $a \in L(m,n;r)$, $b \in L(m,p;s)$, $c \in L(m,q;t)$ olsun. O zaman $[[a,b],c] + [[b,c],a] + [[c,a],b] \equiv 0$ modülo $L(m, n+p+q; r+s+t+1)$ dir.

İspat: $A = L(m,n;r)$, $B = L(m,p;s)$ ve $C = L(m,q;t)$ verilsin. O zaman Lemma 3.10 dan

$$[[A,B],[A,C]] = [[L(m,n;r), L(m,p;s)], [L(m,n;r), L(m,q;t)]]$$
$$\subseteq [L(m, n+p; r+s), L(m, n+q; r+t)]$$
$$\subseteq [L(m, n+p+n+q; r+s+r+t)]$$
$$= \sum_{r+s+r+t} \left[L_{m+r_1}, \dots, L_{m+r_n}, \dots, L_{m+r_{n+p}}, \dots, L_{m+r_{n+p+n}}, \dots, L_{m+r_{n+p+p+q}} \right]$$
$$\subseteq \sum_{r+s+t+1} \left[L_{m+r_1-1}, \dots, L_{m+r_{r-1}-1}, \dots, L_{m+r_n}, \dots, L_{m+r_{n+p}}, \dots, L_{m+r_{n+p+n}}, \dots, L_{m+r_{n+p+n+q}} \right]$$
$$\subseteq \sum_{r+s+t+1} \left[L_{m+r_1-1+r_{n+p+1}}, \dots, L_{m+r_n+r_{n+p+n}}, L_{m+r_{n+1}}, \dots, L_{m+r_{n+p}}, L_{m+r_{n+p+n+1}}, \dots, L_{m+r_{n+p+n+q}} \right]$$

$= L(m, n+p+q; r+s+t+1)$ elde edilir.

Benzer şekilde $[[A,B],[B,C]]$ ve $[[A,C],[B,C]]$ için de yapılır.

Buradan $[[A,B],[A,C]] + [[A,B],[B,C]] + [[A,C],[B,C]] \subseteq L(m, n+p+q; r+s+t+1)$ olup istenilen elde edilir.

Tanım 3: Bazlar: c_1, c_2 temel komütatörleri için $c = [c_1, c_2]$ ile c bir temel komütatör olacak şekilde verilsin. c nin $F(m,1;r) = F_{m+r}$ nin içinde yapısal olarak içerilmesi için gerek ve yeter koşul $c \in F_{m+r}$ olmasıdır. Varsayalım ki bütün r ler ve bütün $1 \le t < n$ için c nin $F(m,t;r)$ nin içinde yapısal olarak içerilmesinin ne anlama geldiği tanımlanmış olsun. O zaman $F(m,n;r)$ içinde c nin yapısal olarak içerilmesi için gerek ve yeter koşul c_1 in $F(m,s;r_1)$ içinde yapısal olarak içerilmesi ve c_2 nin $F(m,t;r_2)$ içinde yapısal olarak içerilmesidir. Öyle ki bazı $s, t \ge 1$ ve bazı $r_1, r_2 \ge 0$ ve $s + t = n$, $r_1 + r_2 = r$ olmalıdır. Eğer $s \ge 2$ ise otomatik olarak $c_2 \in F_m$ olur. Çünkü $[c_1, c_2]$ temel bazdır.

Bir c temel bazı için $c \overline{\in} F(m,n;r)$ olması için gerek ve yeter koşul c nin yapısal olarak $F(m,n;r)$ tarafından içerilmesidir.

Lemma 4: Eğer $c \overline{\in} F(m,n;r)$ ise $c \in F(m,n;r)$ dir.

İspat: $c \overline{\in} F(m,n;r)$ ise c yapısal olarak $F(m,n;r)$ tarafından içerilir. $c = [c_1, c_2]$ olsun. O zaman $c_1 \overline{\in} F(m,s;k)$ ve $c_2 \overline{\in} F(m,t;l)$ olur. Bu şekilde s ve t 1 olana kadar yapısal olarak içerilme tanımı ve tümden gelim uygulanarak $c \in F(m,n;r)$ olduğu elde edilir.

Lemma 5: Eğer $c \overline{\in} F(m,n;r)$ ise

i) $c \overline{\in} F(m,n-1;r+m)$

ii) $c \overline{\in} F(m,n;r-1)$ dir.

İspat: i) $c \overline{\in} F(m,n;r)$ olsun.

$c \overline{\in} F(m,n;r) = \sum_r [F_{m+r_1}, \dots, F_{m+r_{n-1}}, F_{m+r_n}]$ dir.

$\subseteq \sum_r [F_{m+r_1}, \dots, F_{m+m+r_{n-1}+r_n}]$

$= \sum_{r+m} [F_{m+r_1}, \dots, F_{m+r_{n-1}}] = F(m,n-1;r+m)$

$c \overline{\in} F(m,n-1;r+m)$ olur.

ii) $c \overline{\in} F(m,n;r)$ olsun. $F(m,n;r) \subseteq F(m,n;r-1)$ olduğunu Lemma 3.10 dan biliyoruz. O zaman

$c \overline{\in} F(m,n;r-1)$ olur.

Örnek 3: $F(m,n;r)$ içinde c nin yapısal olarak içerilmesi için gerek ve yeter koşul $s,t \geq 1$ ve $r_1, r_2 \geq 0$ iken $s+t=n$, $r_1+r_2=r$ olacak şekilde c_1 in $F(m,s;r_1)$ içinde yapısal olarak içerilmesi ve c_2 nin $F(m,t;r_2)$ içinde yapısal olarak içerilmesidir.

$m=3, n=2$ ve $r=3$ için $F(3,2;3) = [F_6, F_3] + [F_5, F_4]$ tür.

$c = [c_1, c_2]$ olmak üzere $F(3,2;3)$ içinde yapısal olarak içerilsin. O zaman $n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $r_1 = 2$, $r_2 = 1$ olmak üzere c_1, $F(3,1;2)$ içinde ve c_2, $F(3,1;1)$ içinde yapısal olarak içerilsin. c_1, $F(3,1;2)$ içinde yapısal olarak içeriliyorsa biliyoruz ki $s=1$ olduğu için $c_1 \in F_{m+r_1} = F_5$ dir. c_2, $F(3,1;1)$ içinde yapısal olarak içeriliyorsa biliyoruz ki $t=1$ olduğu için $c_1 \in F_{m+r} = F_4$ tür.

O zaman $c = [c_1, c_2] \in F(3,2;3)$ olur.

Not 1: n ve r parçalanışını $n_1 = 1$, $n_2 = 1$, $r_1 = 3$, $r_2 = 0$ olarak da alabilirdik.

Lemma 6: Varsayalım ki $b \overline{\in} F(m,s;i)$ ve $c \overline{\in} F(m,t;k)$ $s+t=n$ ve $i+k=r$ olacak şekilde baz elemanı olsunlar. O zaman $[b,c]$ herbiri yapısal olarak $F(m,n;r)$ tarafından içerilen temel komütatörlerin bir toplamına modülo $F(m,n;r+1)$ e göre kongruenttir.

İspat: b ve c sadece F nin üreteçlerinin bir sonlu sırasını içerdiği için F yi sonlu doğurulmuş varsayabiliriz.

Varsayalım ki $b > c$ olsun. Eğer b F nin bir üreteci ise açık olarak $[b,c]$ bir temel komütatördür. Eğer $b = [b_1, b_2]$ ve $b_2 \leq c$ ise tekrar $[b,c]$ bir temel komütatör olur ve burada gösterilecek bir şey yoktur.

Bir komütatörün farklılık numarasını $[b,c]$ de b,c temel komütatör ve $b > c$ iken aşağıdaki yolla tanımlayalım.

w uzunluklu b verilsin ve uzunluğu $v \leq w$ olacak şekilde bir temel komütatör olduğunu varsayalım. c de uzunluğu g olan bir temel komütatör olsun. Sonra $g < w$ ve $d.n.[b,c] = v - g$ olsun.

Şimdi $d.n.[b,c]$ üzerinden tümevarım kullanalım.

Varsayalım ki $b = [b_1, b_2]$; b_1 ve b_2 temel komütatör ve $b_2 > c$ olsun. O zaman $l(b_2) \geq l(c)$ dir. Ve $b_2 \in F_m$ ve sonuç olarak $b_1 \in F_m$ olur.

Böylece biz $s \geq 2$ varsayabiliriz ve $b_1 \overline{\in} F(m,s_1;i_1)$, $b_2 \overline{\in} F(m,s_2;i_2)$; $s_1 + s_2 = s$, $i_1 + i_2 = i$ $(s_1, s_2 \geq 1$ ve $i_1, i_2 \geq 0)$ yazarız.

(3) $[b,c] = [[b_1,b_2],c] \equiv -[[b_2,c],b_1] - [[c,b_1],b_2]$ $modülo\ F(m,n;r+1)$.

Şimdi $d.n.[b_1,c] < d.n.[b,c]$ olup tümevarım hipotezi gereği her i için $e_i \overline{\in} F(m,s_1+t;i_1+k)$ olacak şekilde temel komütatörler ve $\propto_i \in Z$ olmak üzere $[b_1,c] \equiv \propto_1 e_1 + \cdots + \propto_q e_q$ modülo $F(m,s_1+t;i_1+k+1)$.
$[x+y,z] = [x,z]+[y,z]$ olduğundan Lemma 3.10 ve Lemma 3.11 den
(4) $\left[[b_1,c],b_2\right] \equiv \sum_{j=1}^{q} \propto_i \left[e_j,b_2\right]$ modülo $F(m,n;r+1)$ dir.
Şimdi her bir $1 \le j \le q$ için $l\,(e_j) \ge l\,(b)$ dir. Ayrıca $b_2 > c$ olup $d.n.[b_2,c] < d.n.[b,c]$ dir. Böylece her bir $\left[e_j,b_2\right]$ için ve sonuç olarak $\left[[b_1,c],b_2\right]$ için tümevarımdan $F(m,n;r)$ tarafından yapısal olarak içerilen temel komütatörlerin bir toplamına modülo $F(m,n;r+1)$ e göre kongruenttir yazılabilir.
Ayrıca $d.n.[b_2,c] < d.n.[b,c]$ olduğundan her i için $f_i \overline{\in} F(m,s_2+t;i_2+k)$ olacak şekilde temel komütatörler ve $\beta_i \in Z$ olmak üzere
$[b_2,c] \equiv \beta_1 f_1 + \cdots + \beta_h f_h$ modülo $F(m,s_2+t;i_2+k+1)$ e göre kongruenttir.
Belirli bir f_i için 2 İhtimal vardır. Ya $f_i \ge b_1$ ya da $f_i < b_1$ dir. Yukarıdaki her bir durumda da
(5) $\left[[b_2,c],b_1\right] \equiv \sum_{j=1}^{h} \beta_i \left[f_j,b_1\right]$ modülo $F(m,n;r+1)$ dir.
Şimdi 2 durumu da inceleyelim.
Durum 1: $f_j \ge b_1$ olsun. Şimdi $l\,(f_j) \le l\,(b)$ ve ayrıca $b_1 > b_2 > c$ olup $d.n.\left[f_j,b_1\right] < d.n.[b,c]$ olur.
Durum 2: $f_j < b_1$ olsun. $l\,(b_1) \le l\,(b)$ ve ayrıca c den daha büyük uzunluğa sahip f_j ler için $f_j > c$ olup $d.n.\left[b_1,f_j\right] < d.n.[b,c]$ olur.
Böylece tümevarım hipotezinden her bir $\left[f_j,b_1\right]$ $F(m,n;r)$ tarafından yapısal olarak içerilen temel komütatörlerin bir toplamına modülo $F(m,n;r+1)$ e göre kongruent olur. Ve böylece (5) den $\left[[b_2,c],b_1\right]$ de olur. Böylece $\left[[b_1,c],b_2\right]$ ve $\left[[b_2,c],b_1\right]$ modülo $F(m,n;r+1)$ e göre bir toplamdır ve (3) den istenilen elde edilmiş olur.
Teorem 1: $F(m,n;r)\big/F(m,n;r+1)$ serbest abelyendir. Ve $c \overline{\in} F(m,n;r)$ olmak üzere $mn+r$ uzunluklu c temel komütatörleri tarafından üretilir.
İspat: $L = F(m,n;r)\big/F(m,n;r+1)$ alalım.

$$[L,L] = \left[F(m,n;r)\big/F(m,n;r+1),\ F(m,n;r)\big/F(m,n;r+1)\right]$$

$$= \left[\left(F(m,n;r)\right)_2\big/F(m,n;r+1)\right] \subseteq F(m,n;r+1)\big/F(m,n;r+1)$$

$= 0$ olur.

Buradan $F(m,n;r)/F(m,n;r+1)$ serbest abelyen olur.

Ayrıca $F(m,n;r) \subseteq F_{mn+r}$ ve $F(m,n;r+1) \subseteq F_{mn+r+1}$ dir.
Şimdi temel komütatörlerin $mn+r$ uzunluklu olduğunu göstermeliyiz.
$n=1$ iken $F(m,1;r)=F_{m+r}$ ve $F(m,1;r+1)=F_{m+r+1}$ olup F_{m+r}/F_{m+r+1} elde edilir ki bunun temel komütatörlerinin uzunluğunun $m+r$ olduğunu biliyoruz. $n>1$ iken tümevarım uygulayalım. Eğer $a \in F(m,n;r)$ ise a; $b=[b_1,\dots,b_n]$ $b_i \in F_{m+r_i}$ve $r_1+\cdots+r_n=r$ olacak şekilde b lerin toplamıdır.
Tümevarım hipotezinden $[b_1,\dots,b_{n-1}]$ $F(m,n-1;r-r_n)$ tarafından yapısal olarak içerilen temel komütatörlerin bir toplamına modülo $F(m,n-1;r-r_n+1)$ e göre kongruent olur. Ve b_n ise F_{m+r_n} tarafından yapısal olarak içerilen temel komütatörlerin bir toplamına modülo F_{m+r_n+1} e göre kongruent olur.
Şimdi Lemma 3.10 den
$[F(m,n-1;r-r_n+1),F_{m+r_n}] \subseteq F(m,n;r+1)$
$[F(m,n-1;r-r_n),F_{m+r_n+1}] \subseteq F(m,n;r+1)$
olur. Böylece problem $a \overline{\in} F(m,n-1;r-r_n)$ ve $b \overline{\in} F(m,1;r_n)$ iken $[a,b]$; her biri $F(m,n;r)$ tarafından yapısal olarak içerilen $mn+r$ uzunluklu temel komütatörlerin bir toplamına modülo $F(m,n;r+1)$ e göre kongruenttir durumunu göstermeye indirgenir. Bunu da Lemma 4.5 de yapmıştık.
Sonuç 2: Bir b temel komütatörü verilsin. O zaman $b \overline{\in} F(m,n;r) \Leftrightarrow b \in F(m,n;r)$ dir.
İspat: →) Lemma 4.2 de yapıldı.
←) Varsayalım ki $b \in F(m,n;r)$ olsun. $b \neq 0$ ve bir temel komütatör iken $b \notin \cap_{i=1}^{\infty} F_i$ olur. Çünkü serbest Lie cebirleri rezidülü nilpotenttir. Böylece $b \notin \cap_{i=1}^{\infty} F(m,n;i)$ olur ve varsayalım ki $b \in F(m,n;s), b \notin F(m,n;s+1)$ olsun. $s \geq r$ ve Teorem 4.6 den b modülo $F(m,n;s+1)$ e göre $F(m,n;s)$ tarafından yapısal olarak içerilen temel komütatörlerin bir toplamıdır. Böylece b de temel komütatör olduğundan bu tek toplam tam olarak b olur ve bu bize $b \overline{\in} F(m,n;s)$ olduğunu verir ve böylece $b \overline{\in} F(m,n;r)$.
Teorem 2: $F_{m,n}$ in her elemanı $\alpha_i \in Z$, $c_1 < \cdots < c_s$ temel komütatörlerin bir sırası iken mod $F(m,n;r)$ e göre $\alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_s c_s$ olacak şekilde $c_1,\dots,c_s$ $F_{m,n}$ tarafından yapısal olarak içerilen uzunluğu $mn+r$ den küçük olacak şekilde temel komütatörler olmak üzere tek türlü yazılabilir.
İspat: Teorem 1 den açık.
Teorem 3: $F_{m,n} \cap F_{mn+r} = F(m,n;r)$.
İspat: İspatı r üzerinden tümevarımla yapalım. $r=0$ durumu açıktır.
$F(m,n;r) \subseteq F_{m,n} \cap F_{mn+r}$ olduğu açıkça bellidir. $r>0$ varsayalım ve $a \in F_{m,n} \cap F_{mn+r}$ olsun. $a \in F(m,n;r-1)$ iken tümevarım hipotezi ve Teorem 4.5 den a mod $F(m,n;r)$ ye göre $mn+r-1$ uzunluğa sahip temel komütatörlerin bir toplamıdır. Ayrıca $a \in F_{mn+r}$ ise bu toplam 0 olmak zorunda kalır ve böylece $a \in F(m,n;r)$ dir. Böylece

$F_{m,n} \cap F_{mn+r} \subseteq F(m,n;r)$ olur. Buradan
$F_{m,n} \cap F_{mn+r} = F(m,n;r)$ elde edilmiş olur.

Kaynaklar

GRUENBERG, K. W., 1957. Residual Properties of Infinite Soluble Groups. Proc. London Math. Soc., (3) 7. 29-62.

HALL, M., 1959. The Theory of Groups. Macmillan, New York. 434s.

HURLEY, T. C., 1979. Intersections of Terms of Polycentral Series of Free Groups and Free Lie Algebras. Pacific Journal of Mathematics. Vol. 82, No. 1:105-116

MAGNUS, W., KARRASS A., and SOLITAR D., 1976. Combinatorial Group Theory. New York. 444s.

SMELKIN, A. L., 1966. Amer. Math. Soc. Transl., (2) 55. 270-304

WARD, M. A., 1969. Basic Commutators. Phil. Trans. Royal Soc. of London, Ser, A, 264. 343-412.