Ç.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü Yıl:2008 Cilt:19-5

KONGRÜANS TAKDİMİNDEN YARIGRUP TAKDİMİ ELDE ETME VE YARIGRUPLARIN GÜÇLÜ YARILATİSLERİ İÇİN TAKDİMLER*

Obtain semigroup presentation from congruence presentation and presentations for strong semilattices*

Kemal TOKER
Matematik Anabilim Dalı

Hayrullah AYIK
Matematik Anabilim Dalı

ÖZET

S bir yarıgrup ve ρ da S üzerinde bir kongrüans olsun. Bu çalışmada ρ sonlu takdimli bir yarıgrup iken S ve S/ρ nun sonlu takdimli olduğu gösterildi *ve* ρ için verilen bir takdimden S ve S/ρ için takdim elde edildi. Ayrıca $S=S[I,S_i;\phi_{j,i}]$ yarıgrupların güçlü yarılatisi olmak üzere; S yarıgrubunun takdimi verildiğinde $S_i(i\in I)$ yarıgruplarının takdimi ve $S_i(i\in I)$ yarıgruplarının takdimleri verildiğinde S yarıgrubunun takdimi bulundu. $S=S[I,S_i;\phi_{j,i}]$ nin sonlu takdimli olabilmesi için gerek ve yeter koşulun I nın sonlu ve her bir $S_i(i\in I)$ yarıgrubunun sonlu takdimli olması gerektiği gösterildi.

ABSTRACT

Let S is a semigroup and let ρ be a congruence on S. In this study we proved that if ρ is finitely presented semigroup then S and S/ρ are finitely presented. We obtained presentations for S and S/ρ from a given presentation for ρ. Moreover, we obtained a presentations for $S_i(i\in I)$ from a given presentations for $S=S[I,S_i;\phi_{j,i}]$ where $S=S[I,S_i;\phi_{j,i}]$ is strong semilattices of semigroups $S_i(i\in I)$. We obtained a presentation for $S=S[I,S_i;\phi_{j,i}]$ from a given presentations for S_i'$s(i\in I)$. Therefore, we proved that the strong semilattice $S=S[I,S_i;\phi_{j,i}]$ of semigroups is fintely presented if and only if I is finite and each $S_i(i\in I)$ is finitely presented.

Giriş

A bir alfabe olsun. A üzerindeki tüm boş olmayan kelimelerden oluşan serbest yarıgrup A^+ ile gösterilir. $R\subseteq A^+\times A^+$ olmak üzere bir yarıgrup takdimi

---

* Yüksek Lisans Tezi-MSc-Thesis

$\langle A|R\rangle$ ikilisinden oluşur. ρ, R yi içeren en küçük kongrüans olmak üzere eğer S yarıgrubu A^{+}/ρ ya izomorfik ise S nin yarıgrup takdimi $\langle A|R\rangle$ ile gösterilir. Bakınız [Howie, J. M., (1995)]. $\langle A|R\rangle$ bir yarıgrup takdimi ve $w_1, w_2 \in A^{+}$ olsun. Eğer w_1 ve w_2 özdeş kelimeler ise $w_1 \equiv w_2$ yazılır. w_1 ve w_2 S nin aynı elemanını temsil ediyorlarsa, yani $w_1\rho = w_2\rho$ ise $w_1 = w_2$ yazılır. $w_1 = w_2$ bağıntısının S de sağlanması için gerek ve yeter koşul $i = 1, 2, \cdots, n-1$ için α_{i+1}, *R* deki bir ilişki bir kez kullanılarak α_i den elde edilmiş olmak üzere, A^{+} daki kelimelerin sonlu bir

$$w_1 \equiv \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots \to \alpha_n \equiv w_2$$

dizisinin olmasıdır. Bakınız [Johnson, D.L., (1990)] Eğer A ve R sonlu kümeler ise $\langle A|R\rangle$ ye bir sonlu takdim eğer bir S yarıgrubunun bir sonlu takdimi var ise S ye sonlu takdimli yarıgrup denir.

Önerme 1. S bir yarıgrup ve ρ da S üzerinde bir kongrüans olsun. Eğer X kümesi, ρ için bir doğuray kümesi ise φ_i de i. izdüşüm olmak üzere $\varphi_i(X)$ $(i = 1, 2)$ S için bir doğuray kümesidir.

İspat: $s \in S$ olsun. ρ S üzerinde kongrüans olduğundan ρ yansımalıdır. O halde $(s, s) \in \rho$ dur. X, ρ için bir doğuray kümesi olduğundan $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m) \in X$ olmak üzere $(s, s) = (x_1, y_1)\ldots(x_m, y_m)$ dir. Bu eşitliğe φ_i dönüşümü uygulanırsa

$$\varphi_i(s, s) = \varphi_i\{(x_1, y_1)\ldots(x_m, y_m)\}\ (i = 1, 2)$$

$$s = x_1 \ldots x_m = y_1 \ldots y_m$$

elde edilir. O halde $s \in \langle \varphi_i(X) \rangle$ $(i = 1, 2)$ dir. Böylece $\varphi_i(X)$ $(i = 1, 2)$ de S için bir doğuray kümesidir.

Önerme 2. ρ, S yarıgrubu üzerinde bir kongrüans olsun. Eğer ρ sonlu doğuraylı ise ρ için sonlu yansımalı bir doğuray kümesi vardır.

İspat: İspatı için [Ayık, G., Ayık, H., and Ünlü, Y., (2005a)] bakınız.

Önerme 3. X, ρ için yansımalı bir doğuray kümesi ve $\langle X|R\rangle$ de ρ için bir yarıgrup takdimi olsun. Eğer biz φ_i izdüşüm fonksiyonunu X^{+} dan $\varphi_i(X)^{+}$ e bir homomorfizm olacak şekilde genişletirsek o zaman $w \equiv (x_1, y_1)\ldots(x_m, y_m) \in X^{+}$ için

$$\varphi_1(w) = x_1 ... x_m \text{ ve } \varphi_2(w) = y_1 ... y_m$$

olur. $X_i = \varphi_i(X)$ ve $\mathrm{R_i} = \varphi_i(\mathrm{R}) = \{(\varphi_i(\mathrm{r}), \varphi_i(\mathrm{s})) : (\mathrm{r},\mathrm{s}) \in \mathrm{R}\}$ $(i = 1,2)$ alalım. O zaman $\langle X_i \mid R_i \rangle$ $(i = 1,2)$ S için bir yarıgrup takdimidir.

İspat: Önerme 1 den X_i kümesinin S için bir doğuray kümesi olduğunu biliyoruz. $(r,s) \in R$ için

$$r \equiv (x_{i_1}, y_{i_1}) ... (x_{i_m}, y_{i_m}) \text{ ve } s \equiv (x_{j_1}, y_{j_1}) ... (x_{j_n}, y_{j_n})$$

olacak şekilde $(x_{i_1}, y_{i_1}), ..., (x_{i_m}, y_{i_m}), (x_{j_1}, y_{j_1}), ..., (x_{j_n}, y_{j_n}) \in X$ elemanları vardır. $r = s$ ilişkisi ρ da sağlandığından

$$x_{i_1} ... x_{i_m} = x_{j_1} ... x_{j_n}$$
$$y_{i_1} ... y_{i_m} = y_{j_1} ... y_{j_n}$$

ilişkileri de S de sağlanır. Böylece $\varphi_1(r) = \varphi_1(s)$ ve $\varphi_2(r) = \varphi_2(s)$ dir. Bundan dolayı R_i deki tüm bağıntılar S de sağlanır. $u, v \in X_i^+$, S de aynı elemanı temsil eden iki kelime olsun. O zaman

$$u \equiv x_1 ... x_m, \ v \equiv y_1 ... y_n$$

olacak şekilde $x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n \in X_i$ elemanları vardır. X , ρ için yansımalı bir doğuray kümesi ve $X_i = \varphi_i(X)$ olduğundan

$$(x_1, x_1), ..., (x_m, x_m), (y_1, y_1), ..., (y_n, y_n) \in X$$

dir. $\overline{u} \equiv (x_1, x_1) ... (x_m, x_m)$ ve $\overline{v} \equiv (y_1, y_1) ... (y_n, y_n)$ olarak alalım. $\overline{u}$ ve $\overline{v}$ ρ da aynı elemanı temsil eder ve böylece $\overline{u} = \overline{v}$ ilişkisi ρ da sağlanır. Bundan dolayı $\overline{u}$ den $\overline{v}$ ye sonlu bir zincir vardır. Yani $i = 1, 2, \cdots, n-1$ için α_{i+1}, *R* deki bir ilişki bir kez kullanılarak α_i den elde edilmiş olmak üzere, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in X^+$ kelimelerinin sonlu bir

$$\overline{u} \equiv \alpha_1 \to \alpha_2 \to ... \to \alpha_n \equiv \overline{v}$$

dizisi vardır. Burada $1 < j \leq n$ için, $(r_j, s_j) \in R$ veya $(s_j, r_j) \in R$ olmak üzere $\alpha_{j-1} \equiv u_j r_j v_j$ ve $\alpha_j \equiv u_j s_j v_j$ olacak şekilde $u_j, v_j \in X^*$ vardır. Şimdi α_{j-1} ve α_j ye X^+ dan $\varphi_i(X)^+$ e genişlemesi olan φ_i homomorfizmini uygularsak

$$\alpha_{j-1}^i \equiv \varphi_i(u_j) \varphi_i(r_j) \varphi_i(v_j)$$

$$\alpha_j^i \equiv \varphi_i(u_j)\varphi_i(s_j)\varphi_i(v_j)$$

elde edilir. $\varphi_i(r_j) = \varphi_i(s_j)$ bağıntısı R_i de sağlandığından,

$$\overline{u} \equiv \alpha_1 \to \alpha_2 \to ... \to \alpha_n \equiv \overline{v}$$

zincirindeki tüm elemanlara bu homomorfizmi uygularsak u dan v ye sonlu bir zincirin olduğu görülür. Yani $\alpha_1^i, \alpha_2^i, ..., \alpha_k^i \in X_i^+$ kelimelerinin sonlu bir dizisi

$$u \equiv \alpha_1^i \to \alpha_2^i \to ... \to \alpha_n^i \equiv v$$

vardır öyle ki $\alpha_j^i (1 < j \leq n)$ kelimesi R_i bağıntılarından bir tanesi kullanılarak α_{j-1}^i den elde edilir. Böylece $u = v$ bağıntısı R_i nin bir sonucudur. O halde $\langle X_i | R_i \rangle$, S yarıgrubunun bir takdimidir.

Önerme 4. Eğer S sonlu takdimli bir yarıgrup ve ρ da S üzerinde kongrüans olarak sonlu doğuraylı ise S/ρ da sonlu takdimlidir.

İspat: $\langle X | R \rangle$, S yarıgrubu için bir sonlu takdim ve ρ da $Y = \{(\alpha_1, \beta_1), ..., (\alpha_k, \beta_k)\}$ sonlu kümesini içeren en küçük kongrüans olsun. $S/\rho = \{a\rho : a \in S\}$ dir. $a \in S$ olup $a = x_1...x_n$ olacak şekilde $x_1, ..., x_n \in X$ elemanları vardır. $x_m\rho = \{x : (x_m, x) \in \rho\}$ olup bu x elemanı S nin bir elemanı olduğundan X kümesi S/ρ için bir doğuray kümesidir.

$$S/\rho \cong {}^{X^+/R^\#}\!\Big/_{\rho} = X^+/(R \cup Y)^\#$$

olduğundan $\langle X | R \cup \{\alpha_1 = \beta_1, ..., \alpha_k = \beta_k\} \rangle$ ikilisi S/ρ için bir takdimdir.

Teorem 5. S bir yarıgrup ve ρ da S yarıgrubu üzerinde bir kongrüans olsun. Eğer ρ sonlu takdimli ise S ve S/ρ da sonlu takdimlidir.

İspat: Eğer ρ sonlu takdimli ise o zaman ρ için bir sonlu doğuray kümesi bulunabilir. Önerme 2 den ρ için X gibi bir sonlu yansımalı doğuray kümesi vardır. $\langle X | R \rangle$ takdimi, ρ için bir takdim olsun. Önerme 3 ten $\langle \varphi_1(X) | \varphi_1(R) \rangle$, S için bir takdimdir ve bu takdim sonludur. Böylece S sonlu takdimlidir. ρ yarıgrup olarak sonlu doğuraylı olduğundan, kongrüans olarak ta sonlu doğuraylıdır. Önerme 4 ten S/ρ da sonlu takdimlidir.

Önerme 6. $S = S[I, S_i; \phi_{j,i}]$ yarıgrupların güçlü yarılatisi olsun. Her bir $i \in I$ için A_i ile S_i nin doğuray kümesini ve A ile de S nin doğuray kümesini gösterelim. $a \in A_i$ ve $u \in A_j^+$ $(i \neq j)$ olsun. O zaman $ua = v$ bağıntısı $a_j a = (a_j \phi_{j,ij})(a\phi_{i,ij})$ $(a \in A_i, a_j \in A_j)$ bağıntısının bir sonucu olacak şekilde $v \in A_{ij}^+$ vardır.

İspat: u nun boyu üzerinden tümevarım yapalım. Eğer $|u| = 1$ ise $v \equiv (u\phi_{j,ij})(a\phi_{i,ij})$ alınır. Önerme, boyu $n-1$ olan kelimeler için doğru olsun. Tümevarım hipotezinden $b \in A_{ij}$ ve $v_1 \in A_{ij}^*$ için bv_1 kelimesi vardır ve $(a_2...a_n)a = bv_1$ bağıntısı $a_j a = (a_j \phi_{j,ij})(a\phi_{i,ij})$ $(a \in A_i, a_j \in A_j)$ nın bir sonucudur. $|u| = n$ olsun. u, A_j deki n tane elemanın çarpımı olarak

$$u \equiv a_1...a_n, \qquad (a_1,...,a_n \in A_j)$$

şeklinde yazılır. I bir yarılatis olduğundan $jij = jji = j^2 i = ji = ij$ dır. Bakınız [Ayık, H., and Ruskuc, N., (1999)] $\phi_{ij,ij}$, S_{ij} üzerinde birim dönüşümü göstermektedir. O halde $|a_2...a_n| = n-1$ olduğundan

$$ua \equiv a_1((a_2...a_n)a) = (a_1 b)v_1 = ((a_1\phi_{j,jij})(b\phi_{ij,jij})v_1 \equiv ((a_1\phi_{j,ij})b)v_1$$

dır. $(a_1\phi_{j,ij}) \in A_{ij}^+$ olduğundan $v \equiv (a_1\phi_{j,ij})bv_1$ alınarak ispat tamamlanır.

Önerme 7. Eğer $u \equiv a_{i_1}...a_{i_m}$ $(a_{i_1},...,a_{i_m} \in A)$ ve $k = i_1...i_m$, ise o zaman $u = \bar{u}$ bağıntısı $a_i a_j = (a_i\phi_{i,ij})(a_j\phi_{j,ij})$ $(a_i \in A_i, a_j \in A_j)$ bağıntısının bir sonucu olacak şekilde $\bar{u} \in A_k^+$ kelimesi vardır.

İspat: İspat için [Ayık, G., Ayık, H., Ünlü, Y., (2005b)] bakınız.

Teorem 8. $S = S[I, S_i; \phi_{j,i}]$ yarıgrupların güçlü yarılatisi ve $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \varnothing$ olmak üzere $P_i = \langle A_i | R_i \rangle$, $S_i (i \in I)$ için bir yarıgrup takdimi olsun. Eğer $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ ve $R = \bigcup_{i \in I} R_i$ alınırsa

$$P = \left\langle A \middle| R, a_i a_j = (a_i\phi_{i,ij})(a_j\phi_{j,ij})(a_i \in A_i, a_j \in A_j, i \neq j) \right\rangle$$

$S = S[I; S_i, \phi_{j,i}]$ için bir takdimdir.

İspat: $S = S[I; S_i, \phi_{j,i}]$ yi A nın doğurduğu ve P deki tüm bağıntıların $S = S[I; S_i, \phi_{j,i}]$ de sağlandığı açıktır. $\phi_{i,i}$, S_i üzerinde birim dönüşüm olup

$i^2 = i(i \in I)$ dır. $P = \langle A | R, a_i a_j = (a_i \phi_{i,ij})(a_j \phi_{j,ij})(a_i \in A_i, a_j \in A_j, i \neq j) \rangle$ alalım.

$u = v$ bağıntısı $S = S[I, S_i; \phi_{j,i}]$ de sağlanacak şekilde u ve v, A^+ da iki kelime olsun. Böylece u ve v kelimeleri $S = S[I; S_i, \phi_{j,i}]$ nin aynı elemanını temsil eder. Önerme 7 den $\bar{u} \in A_k^+$ ve $\bar{v} \in A_l^+$ olacak şekilde $k, l \in I$ vardır. Ayrıca $u = \bar{u}$ ve $v = \bar{v}$ bağıntıları $a_i a_j = (a_i \phi_{i,ij})(a_j \phi_{j,ij})$ $(a_i \in A_i, a_j \in A_j)$ bağıntısının bir sonucudur. S_k ve S_l ayrık yarıgruplar olup $\bar{u} = \bar{v}$ bağıntısı hem S_k da hem de S_l sağlanır. O halde $k = l$ olup $\bar{u} = \bar{v}$, R_k nın bir sonucudur. Böylece $u = v$, P nin bir sonucudur. Bakınız [Lavers, T.G., (1998)]

Önerme 9. A, $S = S[I; S_i, \phi_{j,i}]$ için bir doğuray kümesi ve $B_j = \{a \in A : a \in S_j\}$ $(j \in I)$ olsun. O zaman her bir $i \in I$ için,

$$A_i = \bigcup_{j \geq i} \{a_{j,i} \in S_i : a_j \in B_j, a_j \phi_{j,i} = a_{j,i}\}$$

kümesi S_i için bir doğuray kümesidir.

İspat: $A_i \subset S_i$ olduğundan $S_i \subseteq \langle A_i \rangle$ olduğunu göstermek yeterlidir. $s \in S_i$ için $a_{i(1)}, ..., a_{i(m)} \in A$ olmak üzere $s = a_{i(1)} ... a_{i(m)}$ dır. S üzerindeki çarpmanın tanımından $i(1), ..., i(m) \geq i$ dir ve $i(k) = i$ olacak şekilde bir $k \in \{1, ..., m\}$ vardır. Bakınız [Howie, J. M., Ruskuc, N., (1994)]. Böylece

$$s = a_{i(1)} ... a_{i(m)} = (a_{i(1)} \phi_{i(1),i}) ... (a_{i(m)} \phi_{i(m),i}) \equiv a_{i(1),i} ... a_{i(m),i} \in \langle A_i \rangle$$

olup ispat biter.

Teorem 10. $P = \langle A | R \rangle$, $S = S[I; S_i, \phi_{j,i}]$ için bir yarıgrup takdimi olsun. $B_j = \{a \in A : a \in S_j\}$ $(j \in I)$ ve

$$R_i = \{(r\varphi_i, s\varphi_i) : (\mathrm{r,s}) \in \mathrm{R} \cap ((\bigcup_{\mathrm{j} \geq \mathrm{i}} \mathrm{B_j})^* \times (\bigcup_{\mathrm{j} \geq \mathrm{i}} \mathrm{B_j})^*)\}$$

olmak üzere $P_i = \langle A_i | R_i \rangle$ takdimi $S_i (i \in I)$ yarıgrubu için bir takdimdir.

İspat: İspatı için [Araujo, I.M., Branco, M.J.J., Fernandes, V.H., Gomes, G.M.S., and Ruskuc, N., (2001)] bakınız.

Teorem 11. $S_i (i \in I)$ ayrık yarıgruplarının güçlü yarılatisi $S = S[I; S_i, \phi_{j,i}]$ nin sonlu takdimli olması için gerek ve yeter koşul I kümesinin sonlu ve her bir $S_i (i \in I)$ yarıgrubunun sonlu takdimli olmasıdır.

İspat: $S_i(i \in I)$ ayrık yarıgruplarının güçlü yarılatisi $S = S[I; S_i, \phi_{j,i}]$ sonlu takdimli olsun. $W_i = (\bigcup_{j \geq i} B_j)^* B_i (\bigcup_{j \geq i} B_j)^*$ kümesi S_i nin her bir elemanını temsil eder ve W_i kümesi S_i için bir kanonik formdur. S nin doğuray kümesi olan A sonlu ve $S_i(i \in I)$ yarıgrupları ayrık olduklarından sonlu sayıda $B_i = \{a \in A : a \in S_i\}$ kümesi vardır. Bakınız [Robertson, E.F., Ruskuc, N., and Wiegold, J., (1998)]. Böylece sonlu sayıda W_i kümesi vardır. Üstelik $W = \bigcup_{i \in I} W_i$ olup I sonludur. Teorem 10 dan her bir $S_i(i \in I)$ sonlu takdimlidir.

I kümesi sonlu ve her bir $S_i(i \in I)$ yarıgrubu sonlu takdimli olsun. $\langle A_i | R_i \rangle$, $S_i(i \in I)$ nin takdimi olsun. Bu durumda A_i ve R_i sonludur. I sonlu olduğundan $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ ve $R = \bigcup_{i \in I} R_i$ de sonludur. Teorem 8 den $S = S[I; S_i, \phi_{j,i}]$ yarıgrubu da sonlu takdimlidir.

Kaynaklar

ARAUJO, I.M., BRANCO, M.J.J., FERNANDES, V.H., GOMES, G.M.S., and RUSKUC, N., (2001). On generators and relations for unions of semigroups. Semigroup Forum. 63 : 49—62.

AYIK, G., AYIK, H., and ÜNLÜ, Y., (2005a). Presentations for S and S/ρ from a given presentation ρ. Semigroup Forum. 70 : 146—149.

AYIK, G., AYIK, H., ÜNLÜ, Y., (2005b). Presentations and word problems for strong semilattices of semigroups. Algebra & Discrete Mathematics. 4: 28-35.

AYIK, H., and RUSKUC, N., (1999). Generators and Relations of Rees Matrix Semigroups. Proc. Edinburgh Math. Soc. 42 : 482—495.

HOWIE, J. M., (1995). Fundamentals of Semigroup Theory. Clarendon Press, Oxford. 366s.

HOWIE, J. M., RUSKUC, N., (1994). Constructions and presentations for monoids. Comm. Algebra 22 : 6209—6224.

JOHNSON, D.L., (1990). Presentations of Groups. Cambridge University Press.

LAVERS, T.G., (1998). Presentations of general products of monoids. J. Algebra 204 : 733—741.

ROBERTSON, E.F., RUSKUC, N., and WIEGOLD, J., (1998). Generators and relations of direct product of semigroups. Trans. Amer. Math. Soc. 350 : 2665—2685.